# AdS/CFTにおける仕事分布とゆらぎの定理

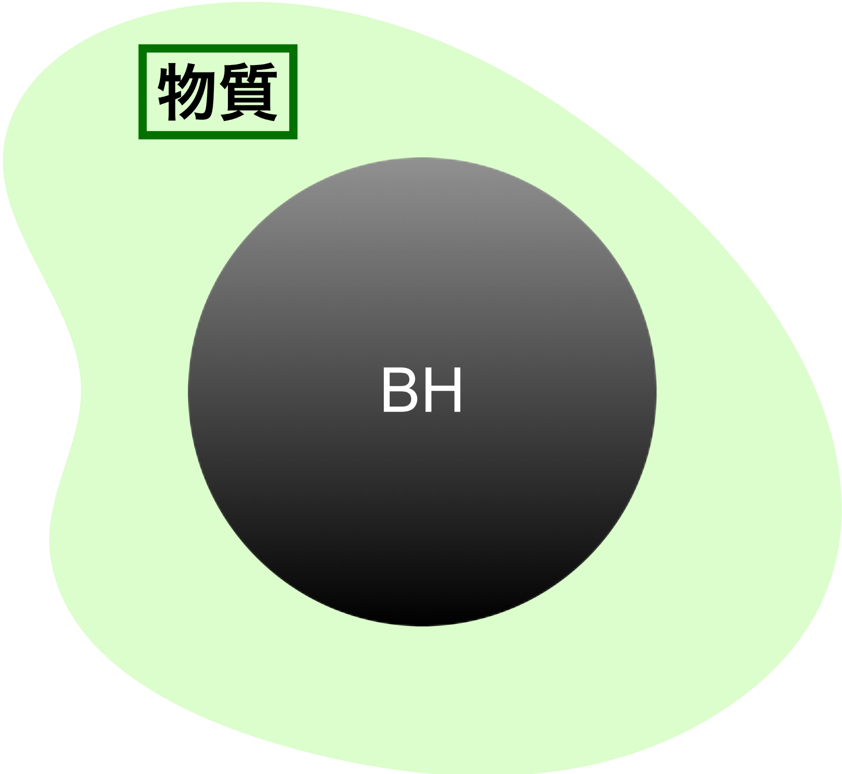
竹田 大地（理研iTHEMS）

2026/01/23

@日本大学素粒子論研究室セミナー

[arXiv: 2511.10305]に基づく

# BHエントロピー，第二法則，その先へ




**ブラックホール系のエントロピー**

$$S \stackrel{?}{=} \frac{\text{Area}}{4G} + \mathcal{O}(G^0)$$

ミクロな状態数

**ブラックホール熱力学第二法則**

$\Delta S \geq 0$（証明：エネルギー条件）

マクロ系の普遍的性質

BHを平衡熱力学の立場で理解

BHの非平衡熱力学は作れるか？ → ゆらぎの定理

# 重力系のゆらぎの定理は未開拓

ゆらぎの定理：エントロピーが減る過程の希少度

$$\tilde{p}[\sigma = -A] = e^{-A} p[\sigma = A]$$

ブラックホール＋外側の物質系

$$\sigma = \frac{\Delta(\mathrm{Area})}{4G_{\mathrm{N}}} + \Delta S_{\mathrm{matter}}$$

[Iso, Okazawa, Zhang (2010)]
[Iso, Okazawa (2011)]
based on [Massar, Parentani (2000)]

WKB, Born, Markov, …

他にも，重力が背景の場合が調べられている

動的な重力系で一般論が作れるか？

# AdS/CFTで重力系のゆらぎの定理へ

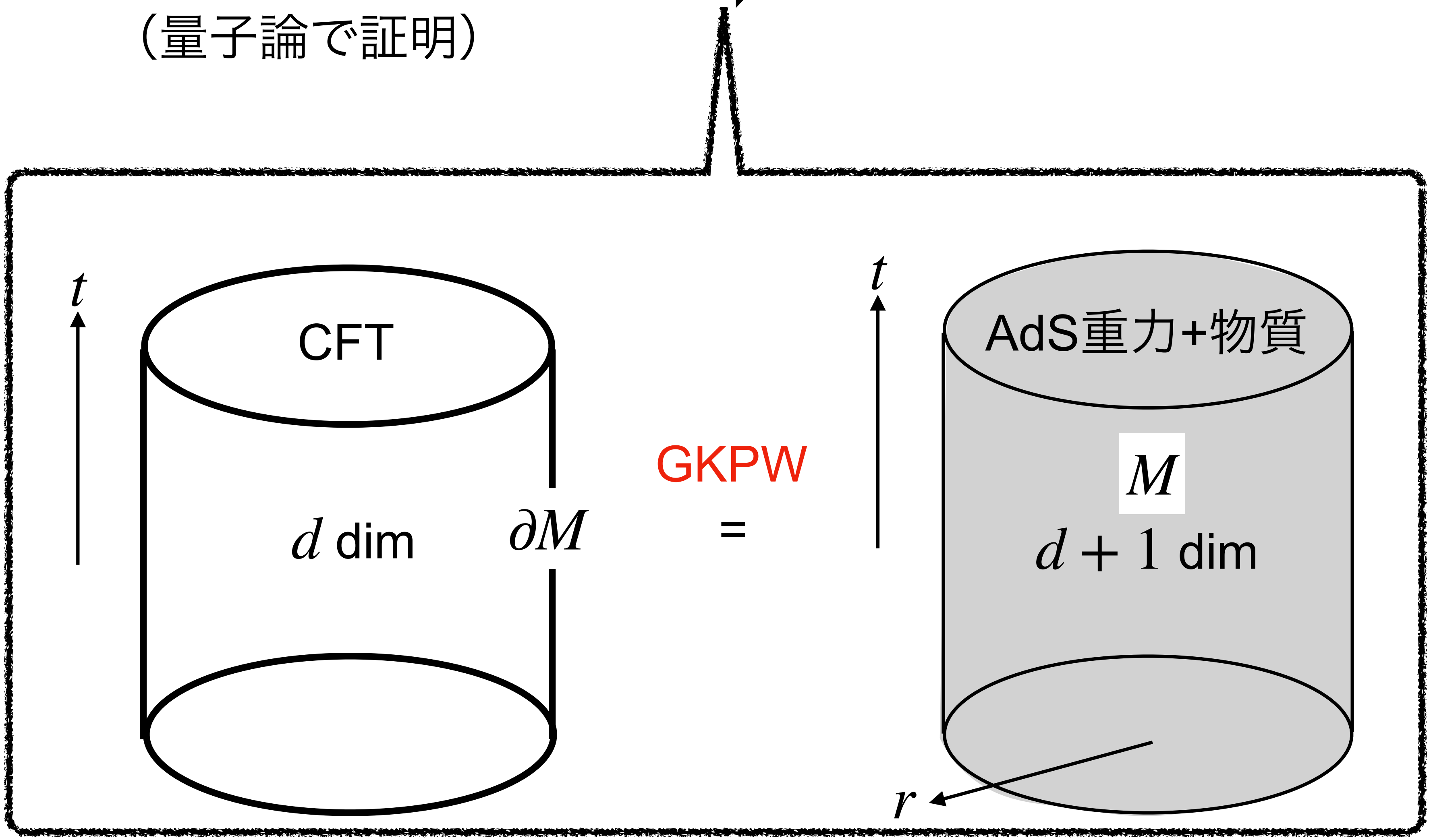
[Tasaki (2000)]

Tasaki-Crooksゆらぎの定理

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\beta(W-\Delta F)} p(W)$$

（量子論で証明）

AdSの言葉に書き換え



# AdS/CFTで量子重力のゆらぎの定理に迫る

1. （量子論側）仕事分布がゆらぎの定理を満たす

2. （重力側へ）仕事分布をAdS重力側で計算

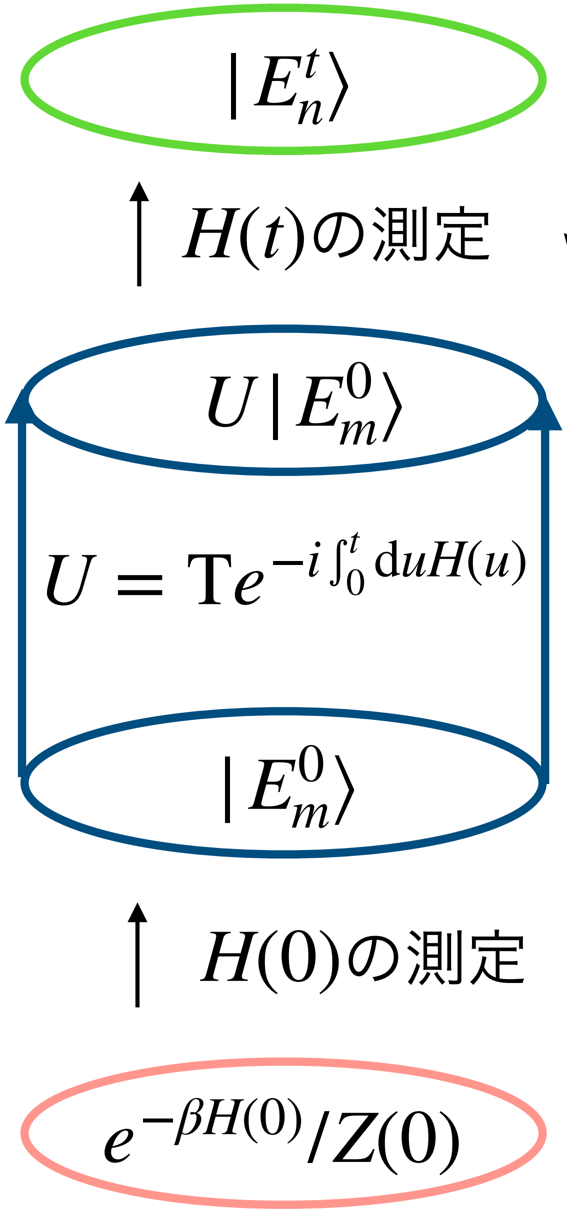
3. 仕事分布は重力の（量子）力学を知る

# AdS/CFTで量子重力のゆらぎの定理に迫る

1. （量子論側）仕事分布がゆらぎの定理を満たす
2. （重力側へ）仕事分布をAdS重力側で計算
3. 仕事分布は重力の（量子）力学を知る

# 仕事：二点測定でのエネルギー変化

[Tasaki (2000)]




ここでの仕事の定義

$$W_{m\to n} = E_n^t - E_m^0$$

実現する確率

$$p_{m\to n} = |\langle E_n^t|U|E_m^0\rangle|^2 e^{-\beta E_m^0}/Z(0)$$

# 仕事分布 = 仕事$W$を獲得する確率

[Tasaki (2000)]

仕事分布

$$p(W) := \sum_{m,n} p_{m\to n}\delta(W - W_{m\to n})$$

$$p_{m\to n} = |\langle E_n^t | U | E_m^0 \rangle|^2 e^{-\beta E_m^0}/Z(0)$$

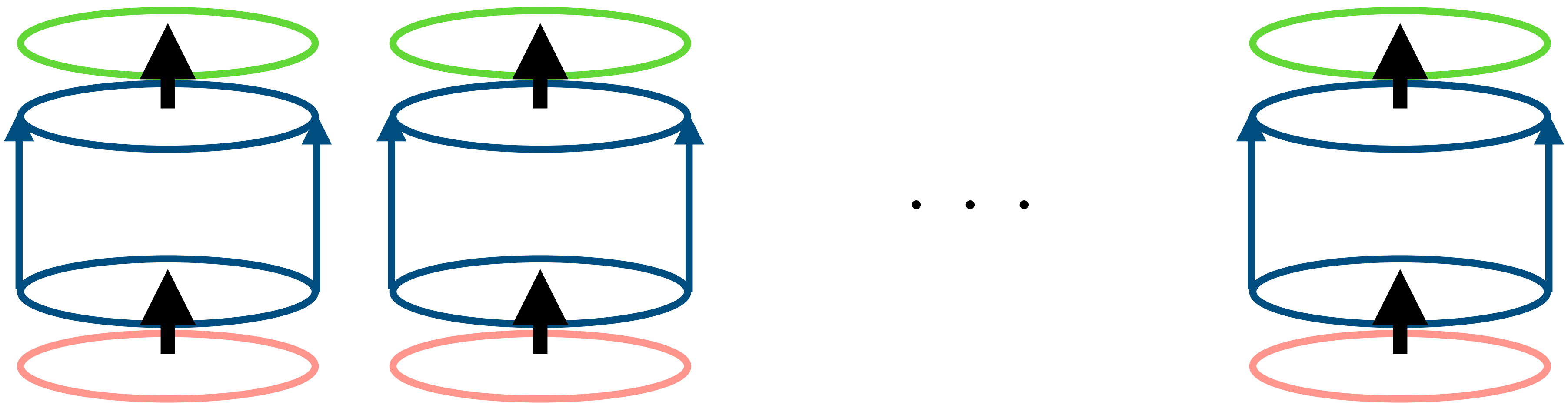
$$W_{m\to n} = E_n^t - E_m^0$$

等価な量：特性関数

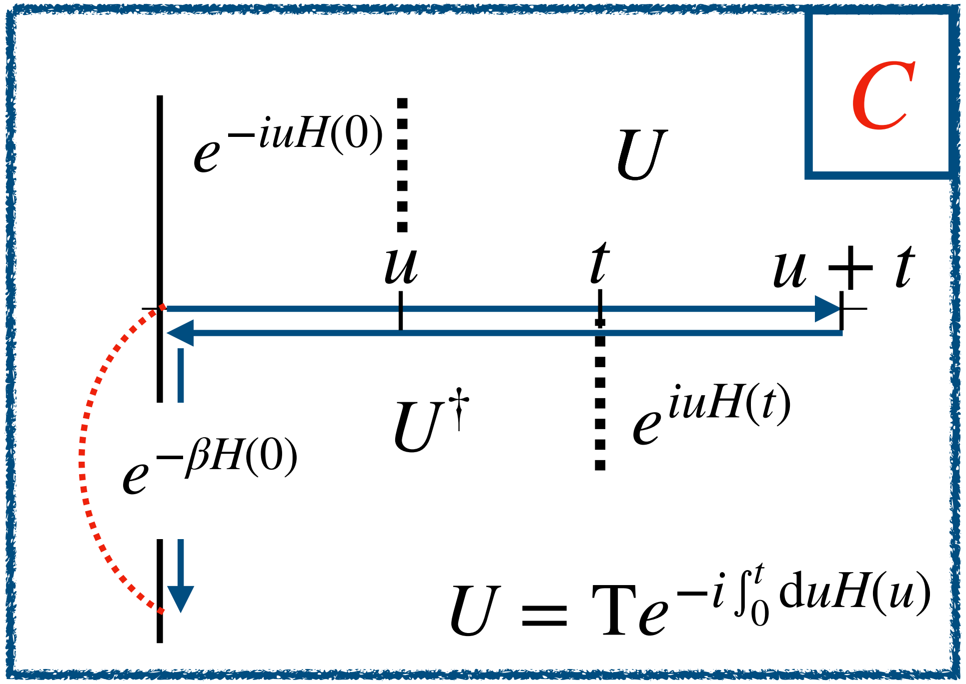
$$G(u) := \int \mathrm{d}W\, e^{iuW} p(W) = \langle e^{iuW} \rangle$$

[Talkner, Hänggi (2007)]

モーメント$\langle W^n \rangle$
を全て含む



# 特性関数はSchwinger-Keldysh




$$G(u) = \int \mathscr{D}\varphi\; e^{iS_{\mathrm{CFT}}[\varphi;C]}$$

$$H(u) = H_{\mathrm{CFT}} + \int \mathrm{d}\vec{x}\; \lambda(u,\vec{x})O(\vec{x})$$

$$G(u) := \int \mathrm{d}W\, e^{iuW} p(W) \qquad p(W) := \sum_{m,n} p_{m\to n}\delta(W - W_{m\to n})$$

$$= \sum_{m,n} e^{iu(E_n^t - E_m^0)} |\langle E_n^t | U | E_m^0 \rangle|^2 e^{-\beta E_m^0}/Z(0)$$

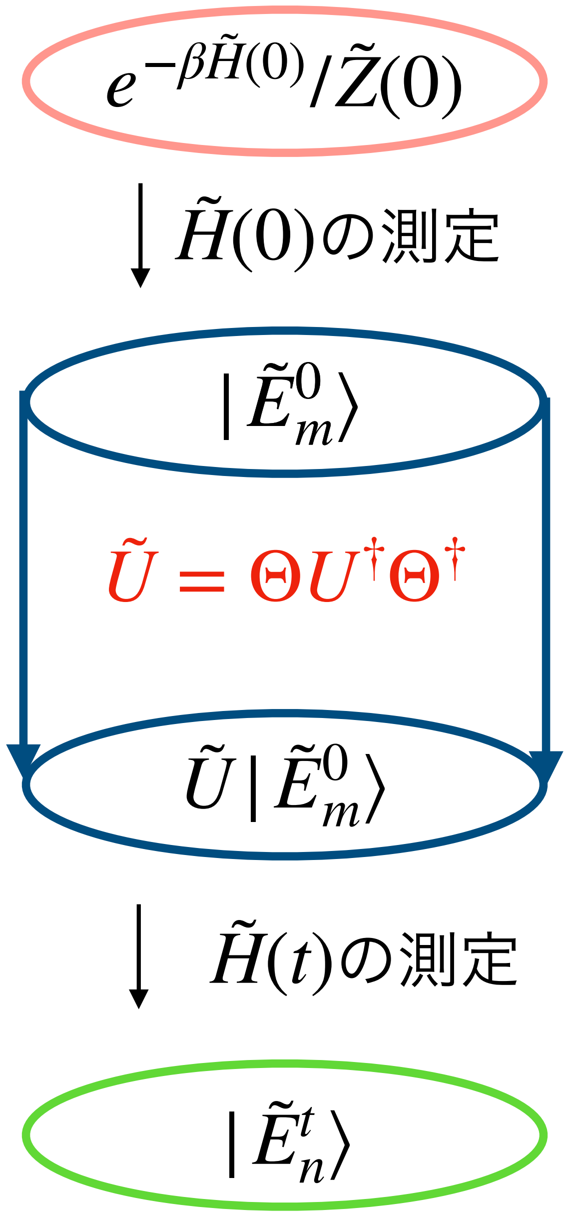
$$= \mathrm{Tr}\left[U^\dagger e^{iuH(t)} U e^{-iuH(0)} e^{-\beta H(0)}\right]/Z(0)$$

[Talkner, Hänggi (2007)]

# ゆらぎの定理では逆過程も必要

$$\tilde{H}(u) = \Theta H(t-u)\Theta^\dagger$$

$\Theta$：CPT演算子 [Tasaki (2000)]




$\tilde{p}_{m\to n}$を左の確率として

仕事分布

$$\tilde{p}(W) := \sum_{m,n} \tilde{p}_{m\to n}\,\delta(W - \tilde{W}_{m\to n})$$

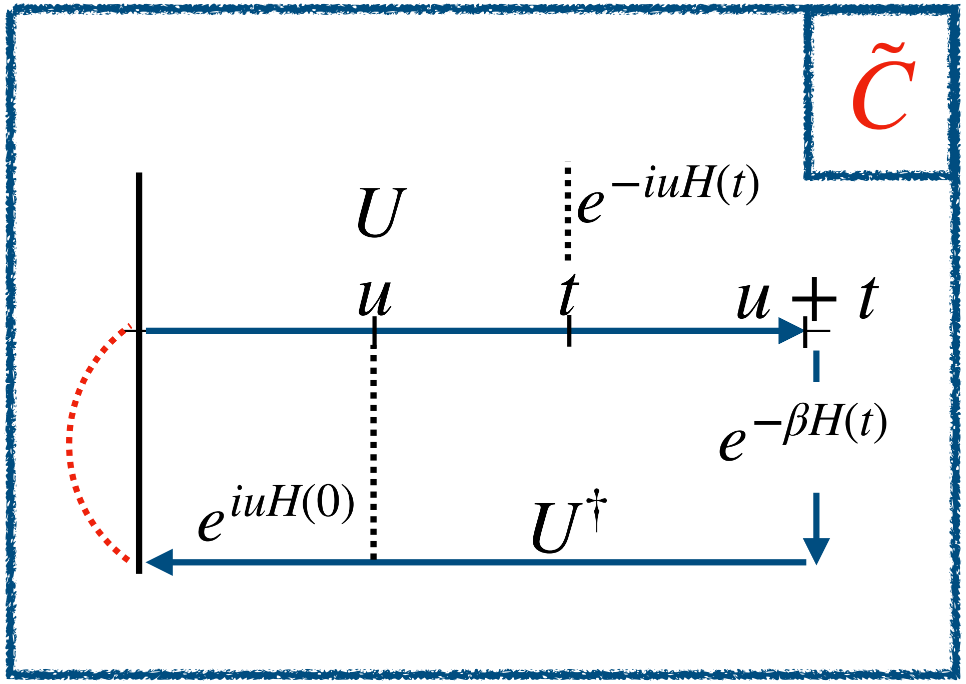
等価な量：特性関数

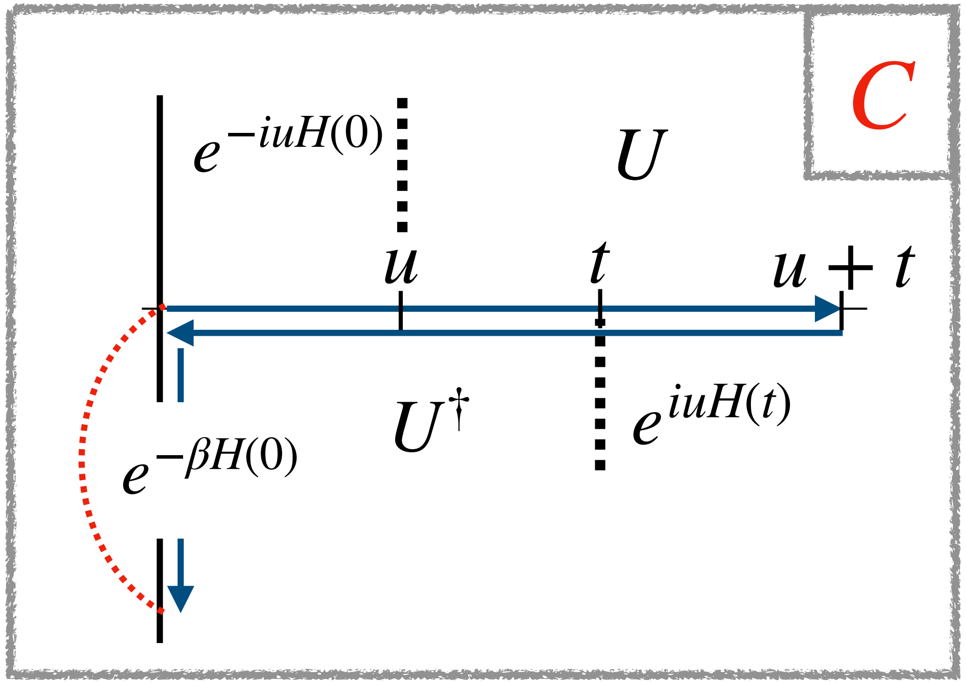
$$\tilde{G}(u) := \int \mathrm{d}W\, e^{iuW}\tilde{p}(W) = \langle e^{iuW}\rangle$$

逆過程での仕事

$$\tilde{W}_{m\to n} = \tilde{E}_n^t - \tilde{E}_m^0$$
$$= E_n^0 - E_m^t$$

# ゆらぎの定理では逆過程も必要




[Talkner, Hänggi (2007)]

$$\tilde{G}(u) = \int \mathscr{D}\varphi\; e^{iS_{\mathrm{CFT}}[\varphi;\tilde{C}]}$$

- $\Theta$の性質によって経路が変更
- ここでの$H(u)$ , $U$は順過程と同じ

$$H(u) = H_{\mathrm{CFT}} + \int \mathrm{d}\vec{x}\; \lambda(u,\vec{x})O(\vec{x})$$

$$U = \mathrm{T}e^{-i\int_0^t \mathrm{d}uH(u)}$$

# ゆらぎの定理：第二法則を破る過程の希少度

Tasaki-Crooksゆらぎの定理

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\sigma} p(W)$$

$$\sigma = \beta(W - \Delta F) \qquad e^{\beta \Delta F} := Z(0)/\tilde{Z}(0) = Z(0)/Z(t)$$

等価な表現

$$\tilde{G}(-u + i\beta) = e^{-\beta \Delta F} G(u)$$

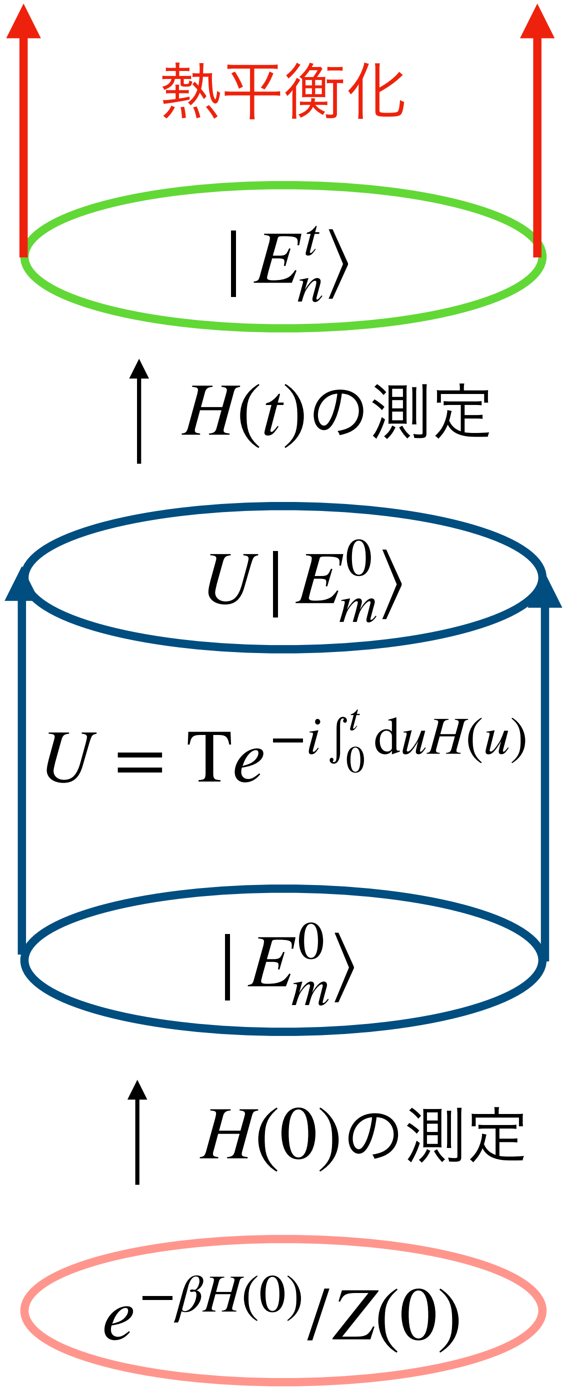
(証明は簡単な代数)

積分系ゆらぎの定理 $\langle e^{-\sigma} \rangle = 1$

Jensen不等式から第二法則

$$1 = \langle e^{-\sigma} \rangle \geq e^{-\langle \sigma \rangle} \implies W_{\mathrm{diss}} := \langle W \rangle - \Delta F \geq 0$$

# エントロピー生成：余分な仕事




熱浴をつけて熱$Q$が逃げる
（仕事なし）

仕事$W$を付与

2つの平衡状態間で必要な最小仕事：

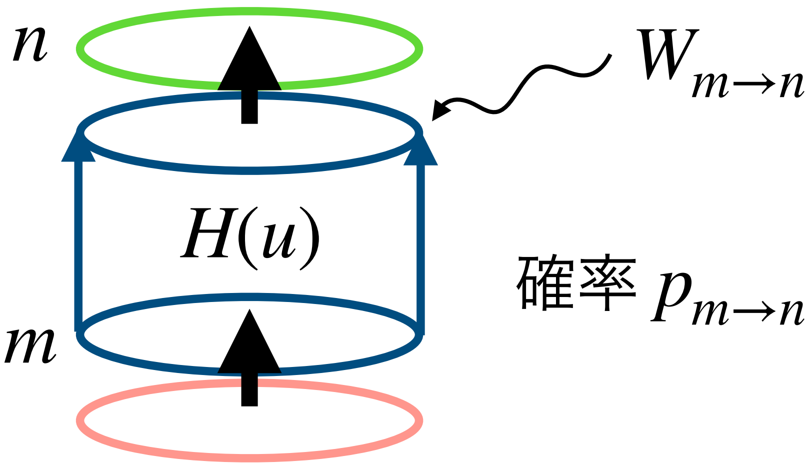
$\Delta F$（等温準静的）

$\tilde{p}(-W) = e^{-\sigma}p(W)$において…

エントロピー生成 = 余分な仕事

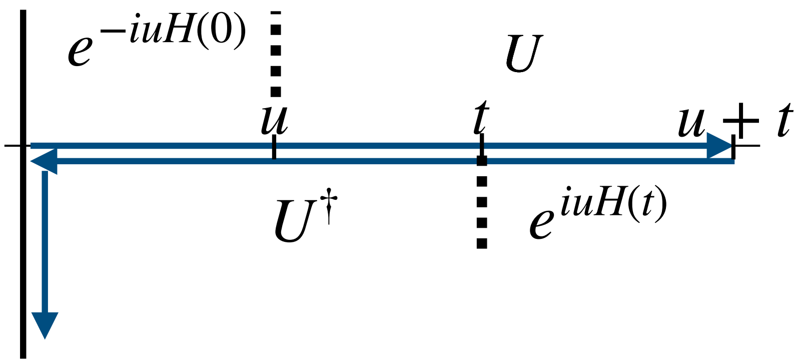
$$\begin{aligned}\sigma &:= \beta(W - \Delta F)\\ &= \beta(\Delta E + Q - \Delta F)\\ &= \Delta S_{\mathrm{thermal}} + \beta Q\end{aligned}$$

# まとめ：仕事分布がゆらぎの定理を満たす




**仕事分布**

$$p(W) := \sum_{m,n} p_{m\to n}\delta(W - W_{m\to n})$$




**特性関数**

$$G(u) := \langle e^{iuW}\rangle = \int \mathscr{D}\varphi\ e^{iS_{\mathrm{CFT}}[\varphi;C]}$$

**Tasaki-Crooksゆらぎの定理**

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\sigma}p(W)$$

**エントロピー生成 = 余分な仕事**

$$\sigma := \beta(W - \Delta F) = \Delta S_{\mathrm{thermal}} + \beta Q$$

# AdS/CFTで量子重力のゆらぎの定理に迫る

1. （量子論側）仕事分布がゆらぎの定理を満たす

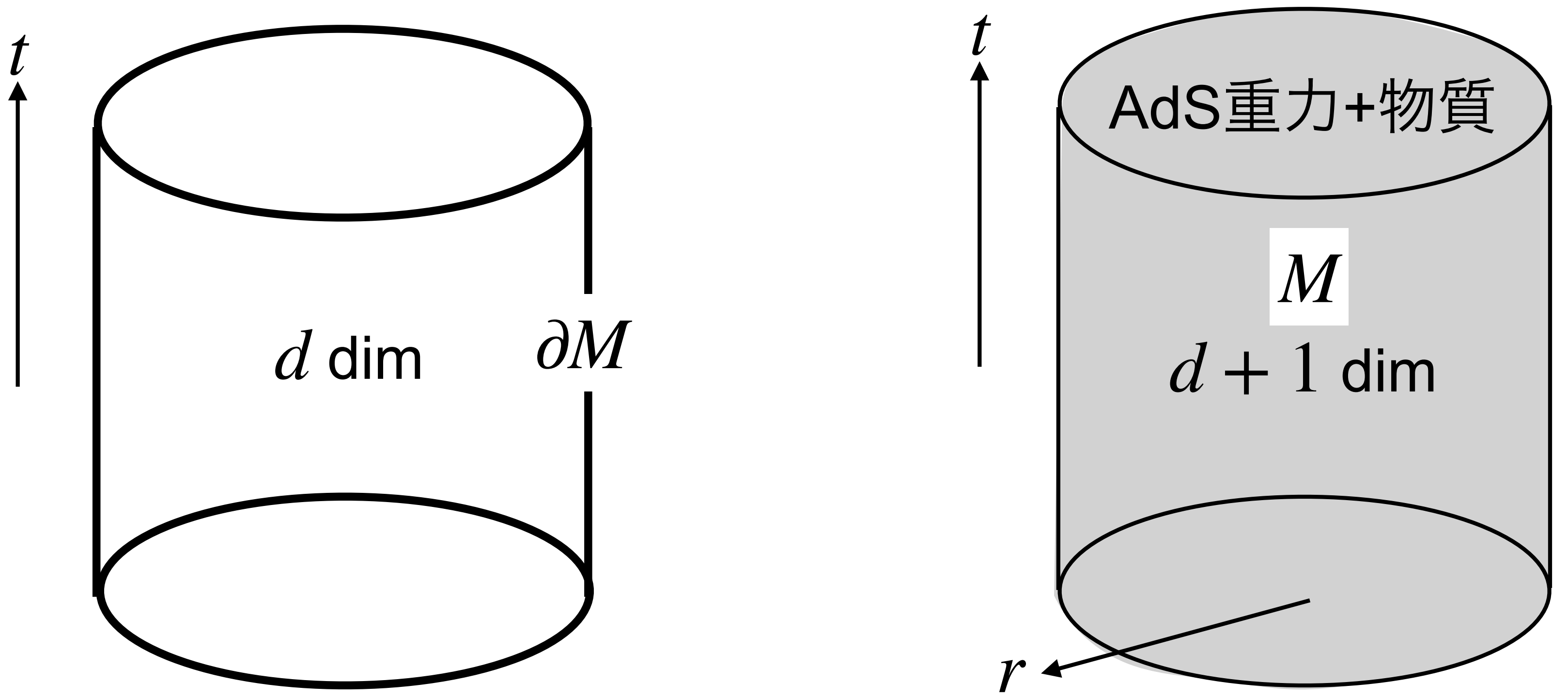
2. （重力側へ）仕事分布をAdS重力側で計算

3. 仕事分布は重力の（量子）力学を知る

# AdS/CFT：経路積分が等価

AdS/CFT対応

$$\int \mathscr{D}\phi\, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[\partial M;\phi]+i\int \mathrm{d}^d x\, J(x) O_\Delta(x)} = e^{iS_{\mathrm{AdS}}[M;\Phi_{\mathrm{cl}}]}\Big|_{\Phi\sim r^{\Delta-d}J}$$

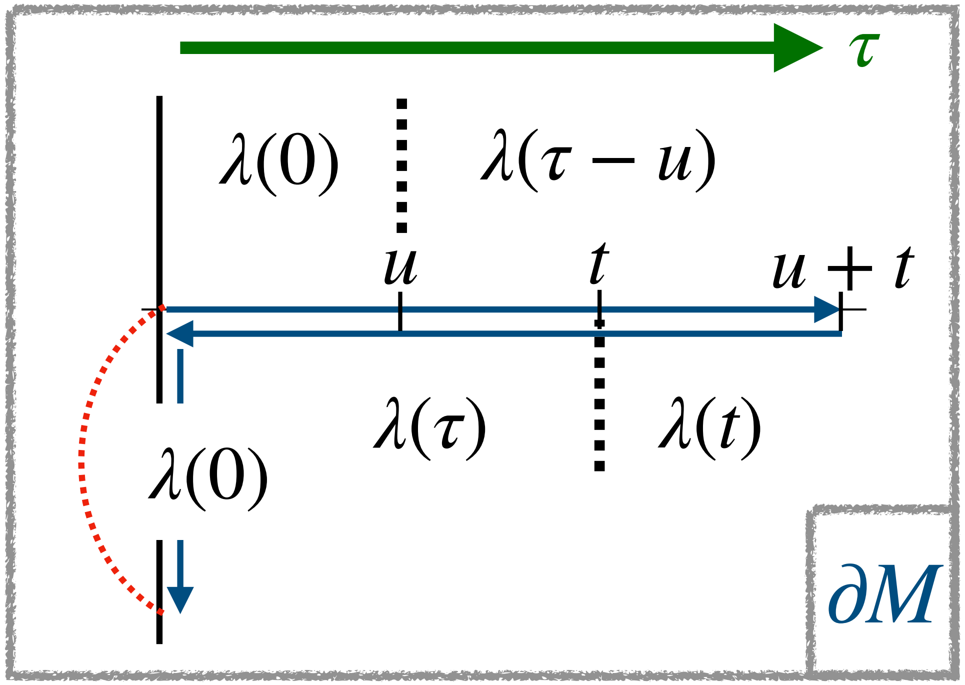



$M$はかなり自由：SK経路、レプリカ多様体など

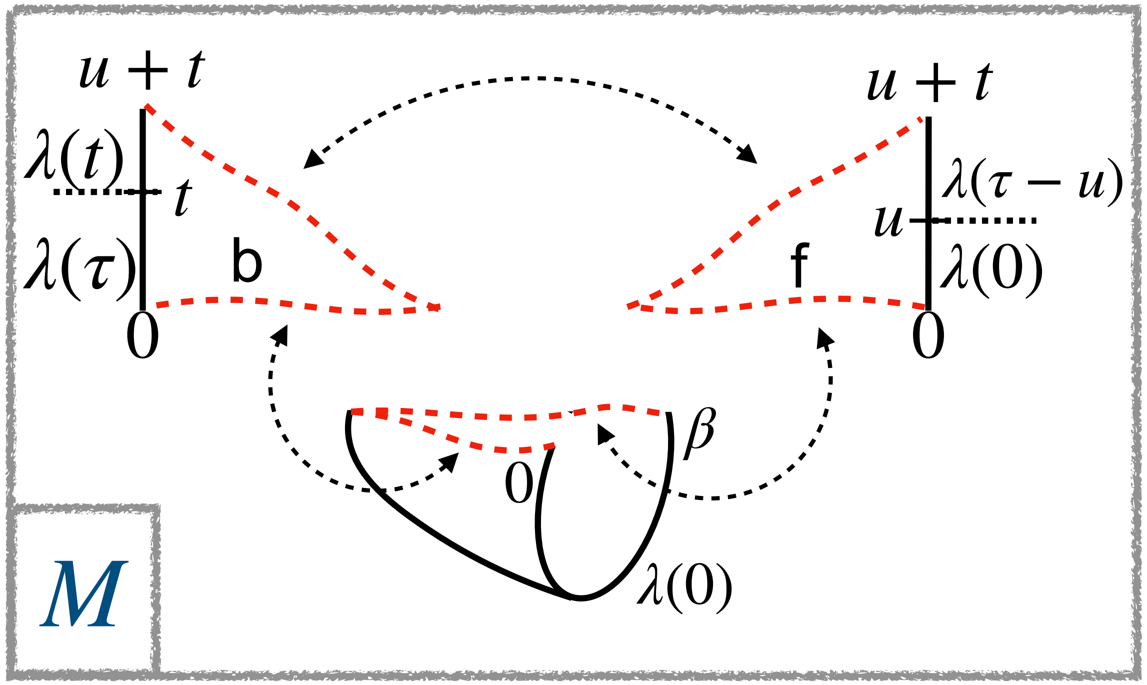
# 特性関数にAdS/CFT辞書使える

$$G(u) := \langle e^{iuW} \rangle = \quad \longleftarrow \quad H(u) = H_{\rm CFT} + \int \mathrm{d}\vec{x}\ \lambda(u,\vec{x}) O(\vec{x})$$

$$\int \mathscr{D}\phi\, e^{iS_{\rm CFT}[\partial M;\phi] + i\int \mathrm{d}^d x\, \lambda(x) O(x)} = e^{iS_{\rm AdS}[M;\Phi_{\rm cl}]}\Big|_{\Phi\sim r^{\Delta-d}\lambda}$$




BH相の場合




バルクのSchwinger-Keldyshは[van Rees (2009)]

# ゆらぎの定理はAdS/CFTが保証

この関係は境界理論で証明済

（AdSに翻訳した）Tasaki-Crooksゆらぎの定理

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\sigma} p(W)$$

$$\sigma = \beta(W - \Delta F) \qquad e^{\beta \Delta F} := \underline{Z(0)/\tilde{Z}(0) = Z(0)/Z(t)}$$

Fourier trした$G(u)$が
バルクで計算可能
（$\tilde{G}(u)$も同様のバルクSK）

通常通りEuclid重力で計算

# 例：自由スカラー場 on BTZ

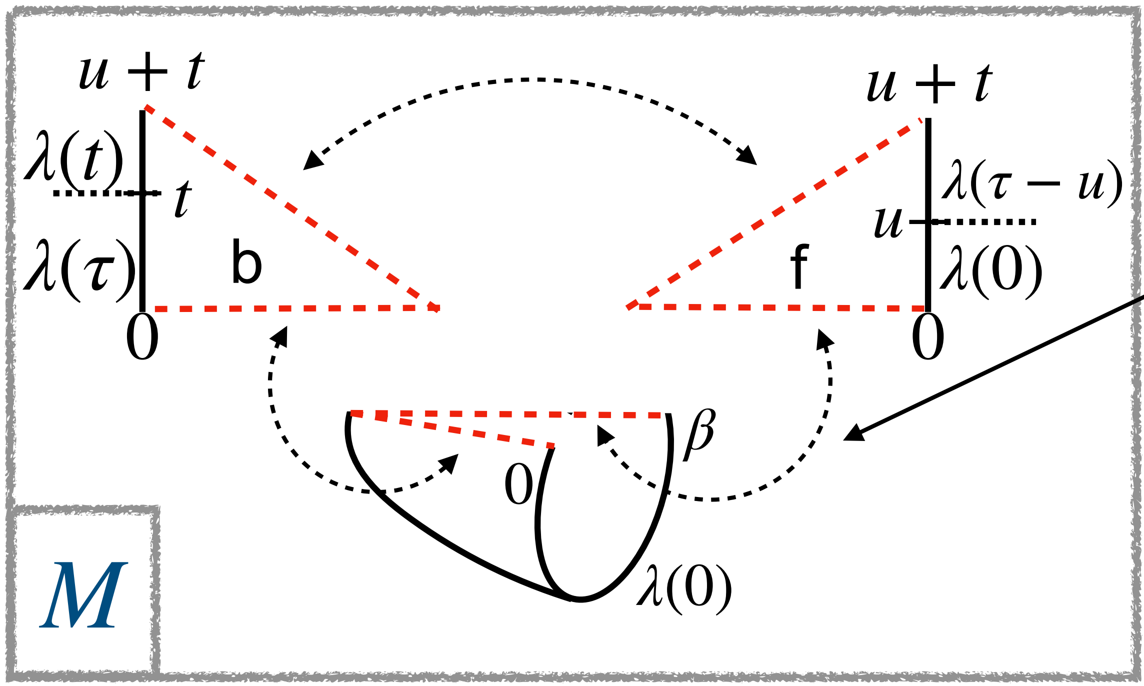
ソースの2次までの摂動論

$$S_{\mathrm{AdS}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\partial\Phi)^2 - \Delta(2-\Delta)\Phi^2\right] + S_{\mathrm{ct}}$$

$$ds^2 = -(r^2 - r_+^2)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - r_+^2} + r^2 \mathrm{d}\theta^2$$

$\theta$は無限でも周期的でも可

$G(u)$は$M$上のon-shell作用




接続の処方

- 計量は$t$で解析接続
- $\Phi$が連続
- $\partial_t\Phi$も "連続"

[Skenderis, van Rees (2008)]

# 例：自由スカラー場 on BTZ

"サイクリック過程" の場合：$\lambda(0) = \lambda(t) \quad \Rightarrow \quad \Delta F = 0$

$$p(W) = \tilde{p}(W)$$

$$= (1-q)\delta(W) + \mathrm{const}\cdot e^{\beta W/2}\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left|\lambda_{W,k}\Gamma(\gamma_{W,k})\Gamma({}_{W,-k})\right|^2$$

$$q = \int_{W\neq 0} \mathrm{d}W\, p(W)$$

$\lambda(\tau, x)$のFourier tr

$$\gamma_{\omega,k} = \frac{\Delta}{2} + i\frac{\omega + k}{2r_+}$$

成立確認！

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\beta W}p(W)$$

# まとめ：仕事分布をAdS側で計算

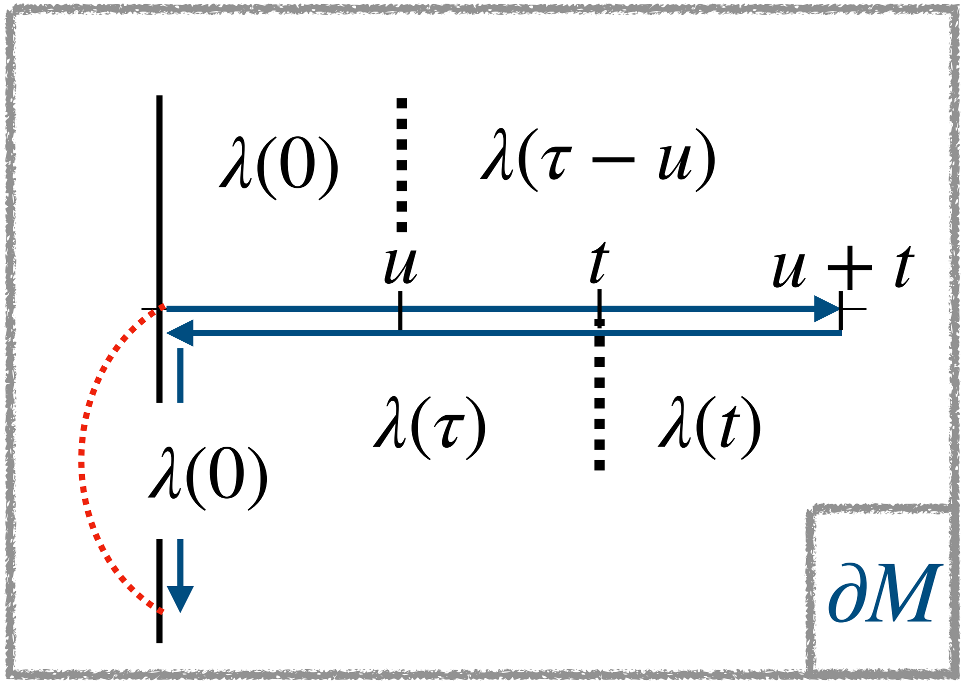
$p(W)$

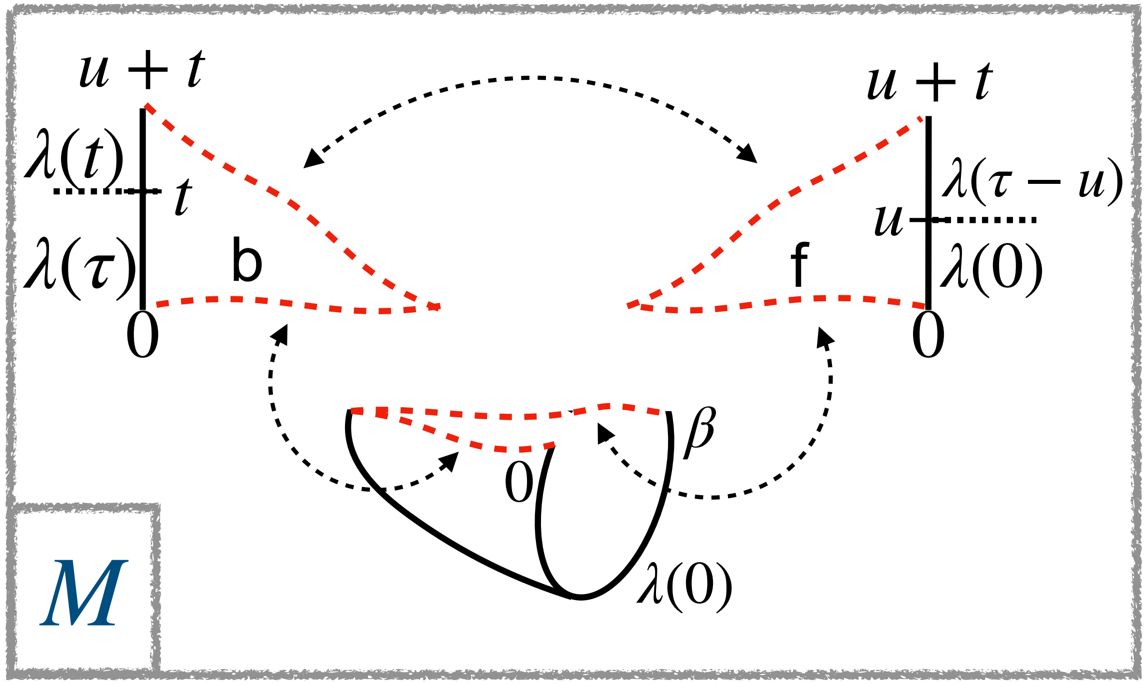
F.T.

**仕事分布の辞書**

$$G(u) = \int \mathscr{D}\phi\, e^{iS_{\rm CFT}[\partial M;\phi]+i\int \mathrm{d}^d x\, \lambda(x) O(x)} = e^{iS_{\rm AdS}[M;\Phi_{\rm cl}]}\Big|_{\Phi\sim r^{\Delta-d}\lambda}$$

BH相の場合




**ゆらぎの定理がバルクの言葉に**

$$\tilde{p}(-W) = e^{-\sigma} p(W)$$

（証明は境界の量子論）

# AdS/CFTで量子重力のゆらぎの定理に迫る

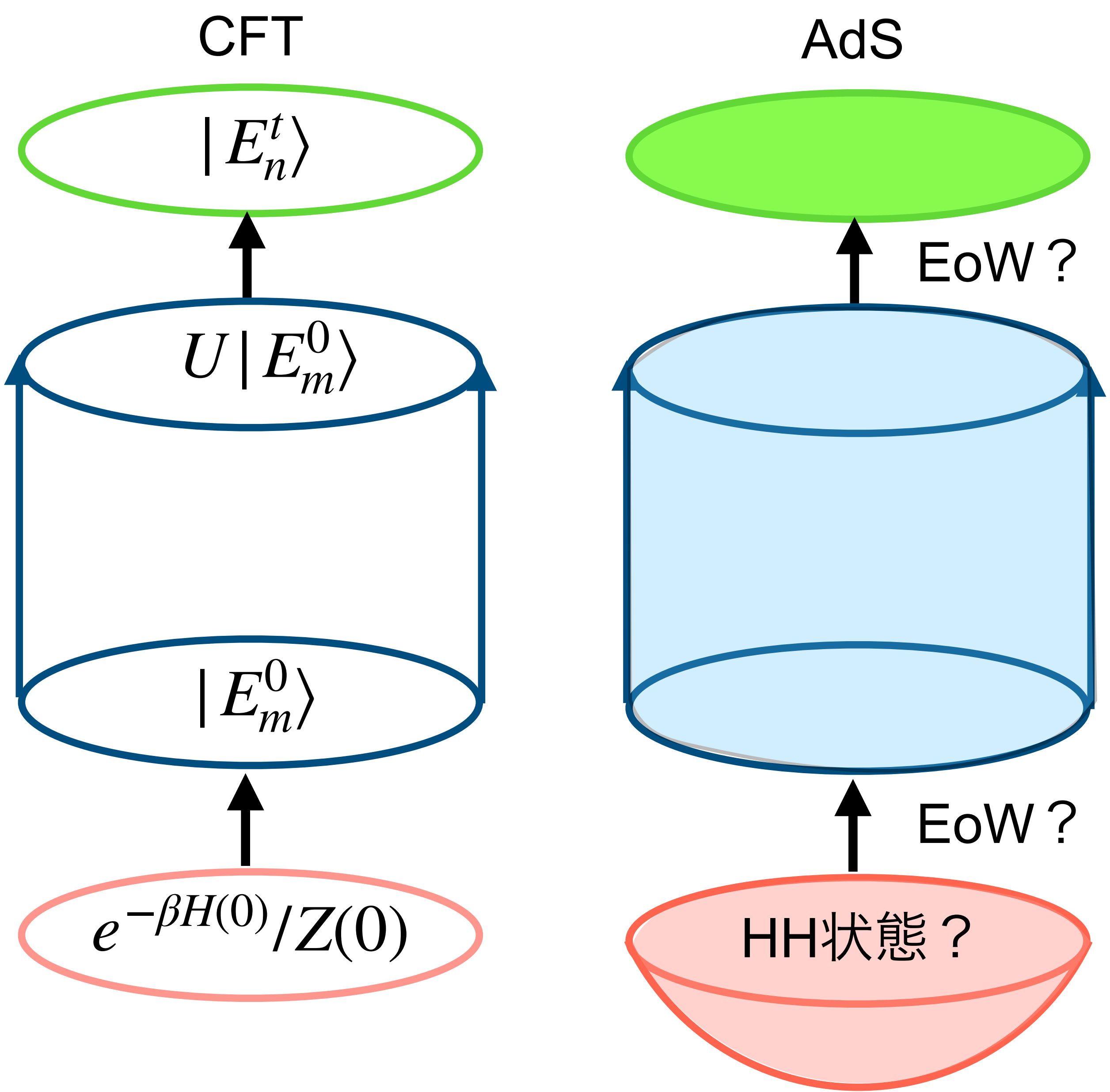
1. （量子論側）仕事分布がゆらぎの定理を満たす

2. （重力側へ）仕事分布をAdS重力側で計算

3. 仕事分布は重力の（量子）力学を知る

# 仕事分布のバルクでの意味を見出したい

SKを通して$p(W)$は計算可能だが，SKは物理的な時空ではない



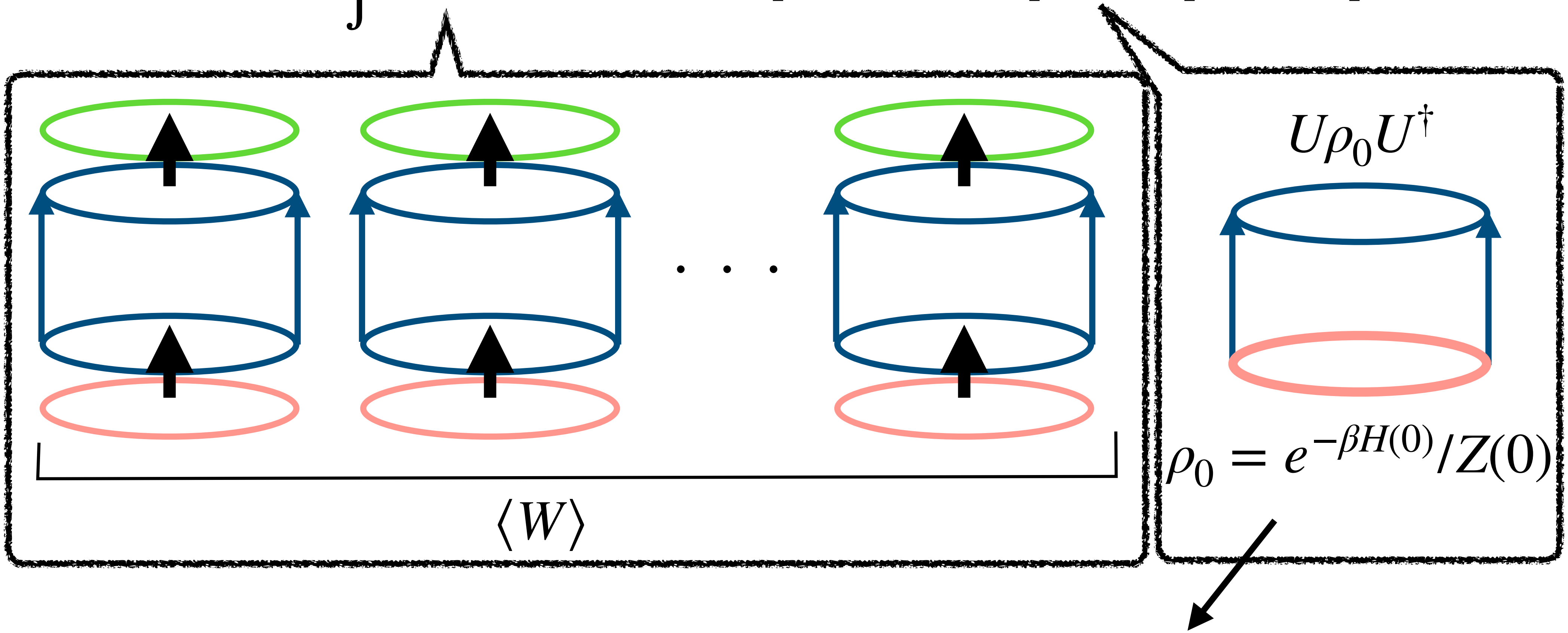

SKで計算した$p(W)$は物理的過程の情報を持つはず

$\langle W\rangle$に着目して考える

# $\langle W \rangle$はいつもの期待値と一緒

簡単な代数によって

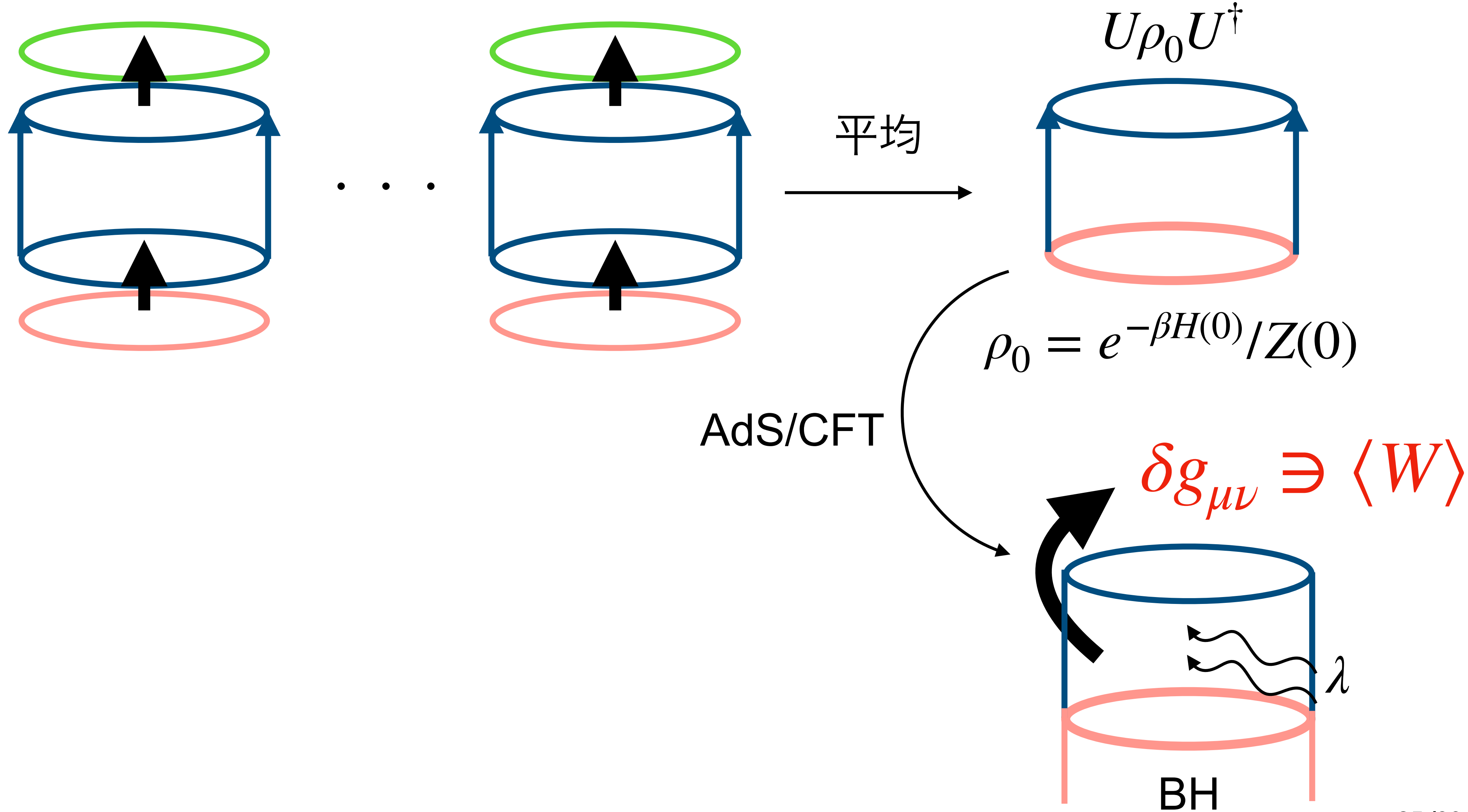
$$\langle W \rangle = \int dW\, Wp(W) = \mathrm{Tr}\left[H(t)U\rho_0 U^\dagger\right] - \mathrm{Tr}\left[H(0)\rho_0\right]$$




バルク描像が明確

# $\langle W \rangle$はバルクの初期値問題の計量が知る

$$H(u) = H_{\mathrm{CFT}} + \int \mathrm{d}\vec{x}\ \lambda(u, \vec{x}) O(\vec{x})$$



# 例：自由スカラー場 on BTZ

ソースの2次までの摂動論

$$S_{\mathrm{AdS}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\partial\Phi)^2 - \Delta(2-\Delta)\Phi^2\right] + S_{\mathrm{ct}}$$

$$ds^2 = -(r^2 - r_+^2)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - r_+^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

"サイクリック過程" の場合：$\lambda(0) = \lambda(t) \;\;\Rightarrow\;\; \Delta F = 0$

$$p(W) = \tilde{p}(W)$$

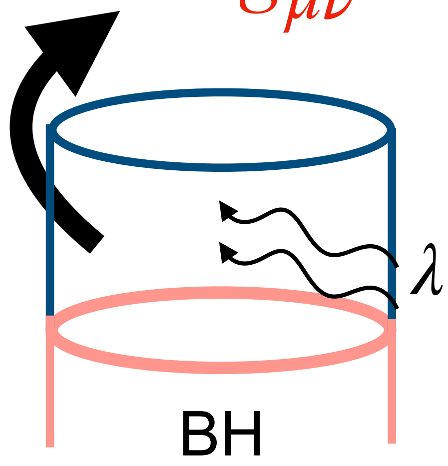
$$= (1-q)\delta(W) + \mathrm{const}\cdot e^{\beta W/2}\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left|\lambda_{W,k}\Gamma(\gamma_{W,k})\Gamma(_{W,-k})\right|^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \langle W\rangle \propto \int \frac{\mathrm{d}k\mathrm{d}W}{(2\pi)^2}\left|\lambda_{W,k}\Gamma(\gamma_{W,k})\Gamma(_{W,-k})\right|^2 W\sinh\frac{\beta W}{2}}$$

# 例：自由スカラー場 on BTZ

初期値問題の計量から読み取るエネルギー変化

$\delta g_{\mu\nu} \ni \langle W \rangle$ (エネルギー期待値の変化)

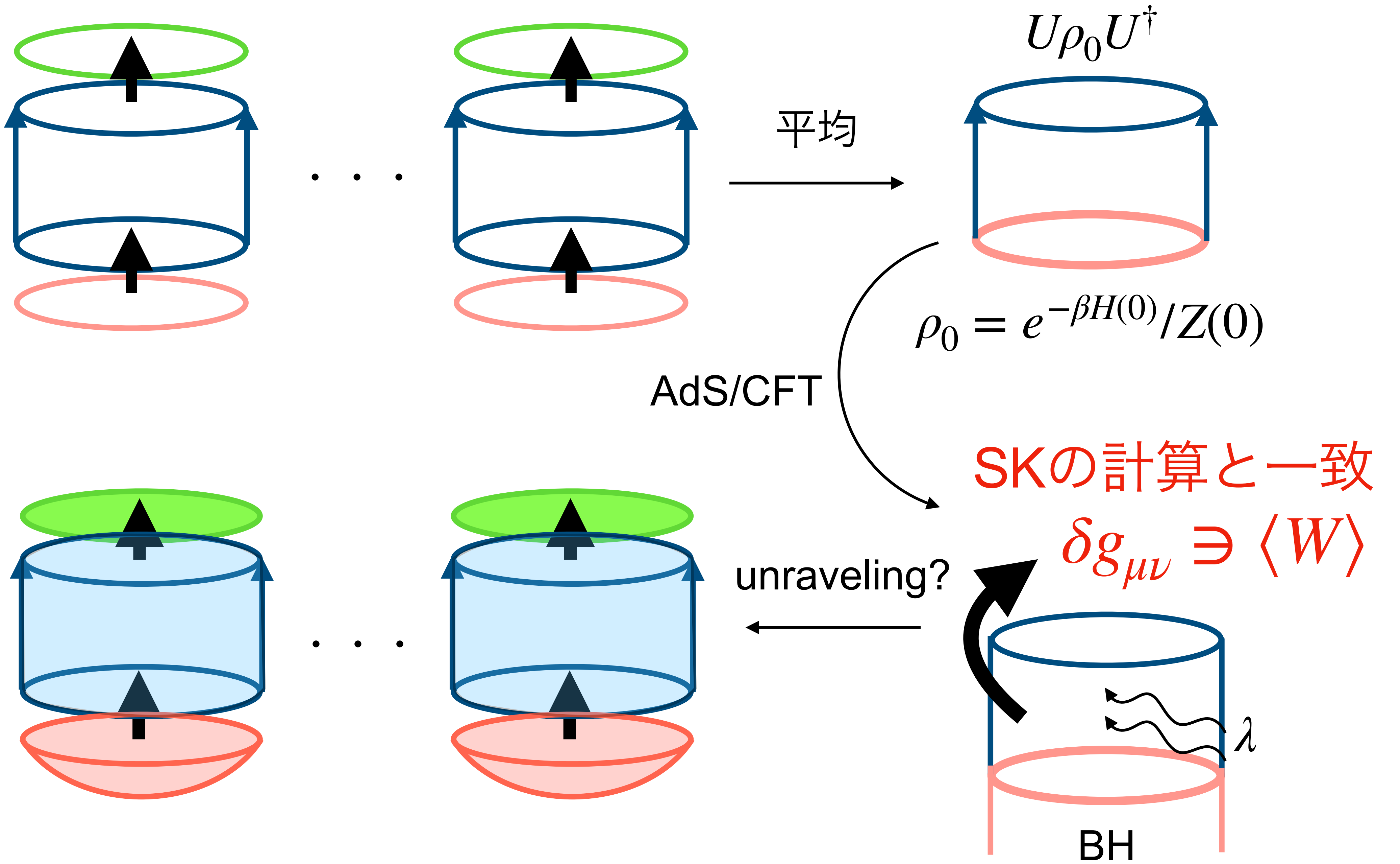



[Shigemura, Shimizu, Sugishita, Takeda, Yoda (2024)]
で実行済

→ 一致する!

SKのプローブスカラーの計算が,
初期値問題の重力のダイナミクスを部分的に知っている

# まとめ：仕事分布は重力の（量子）力学を知る



# AdS/CFTで量子重力のゆらぎの定理に迫る

1. （量子論側）仕事分布がゆらぎの定理を満たす

2. （重力側へ）仕事分布をAdS重力側で計算

3. 仕事分布は重力の（量子）力学を知る

# 仕事分布は量子重力の何を知るか？

- 仕事分布から量子重力を読み取る
  - $\langle W^2 \rangle$も初期値問題に関係？
  - $p(W)$のバルクでの一般公式？

    (幾何学量で書けるとか...)

- 他の具体例でゆらぎの定理のチェック
  - 異なるバルク模型
  - 非サイクリックの場合

- ゆらぎの定理の他のバージョン
  - 複合系（double-trace deformation）
  - 開放系（holographic Lindblad）