Lindblad力学の
ホログラフィック双対

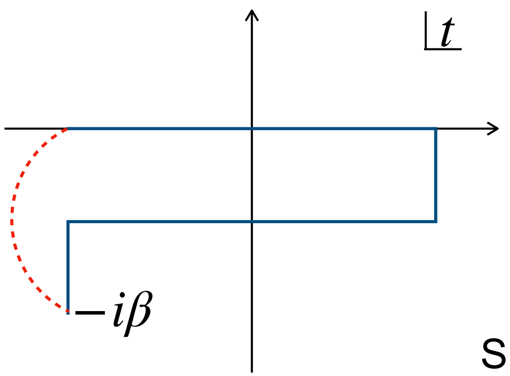
竹田 大地（理研iTHEMS）

2025/06/16
中央大学素粒子論研究室セミナー

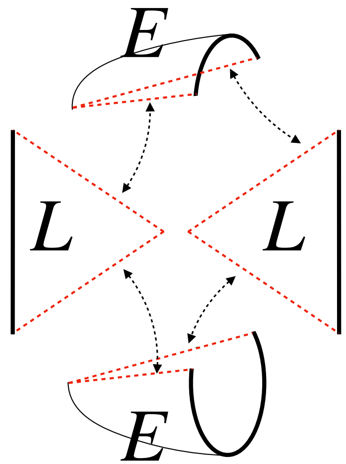
石井孝典氏との共同研究[arXiv:2504.17320]に基づく

AdS/CFTで開放量子系を予言

- Schwinger-Keldysh形式 in AdS/CFT



=



Skenderis, van Rees (2008)

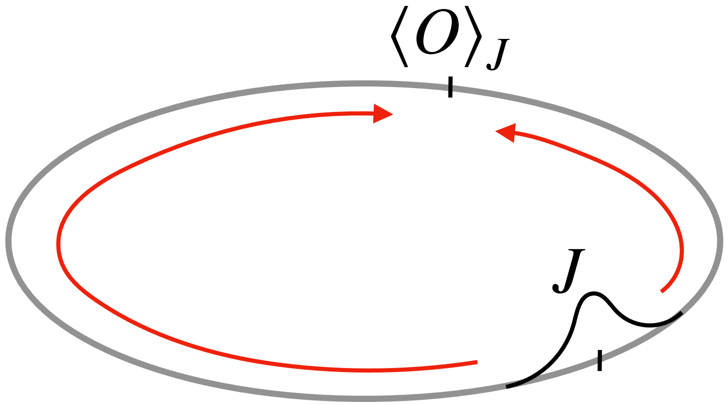
- クォークのブラウン運動をバルクの弦で　de Boar et.al. (2008) Son, Teaney (2009)
- 開放スカラー場理論の有効作用　Jana, Loganayagam, Rangamani (2020)

熱浴をホログラフィックCFTとした開放系

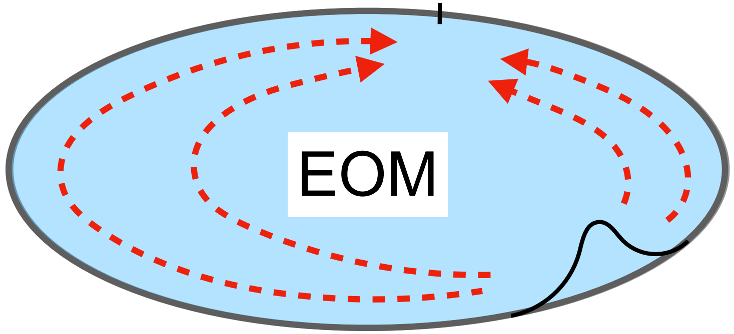
ホログラフィックCFT自体を開放量子系にしたい

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

通常のAdS/CFT



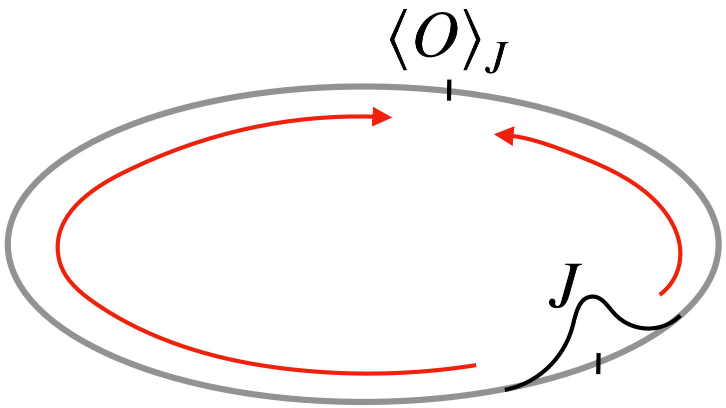
=



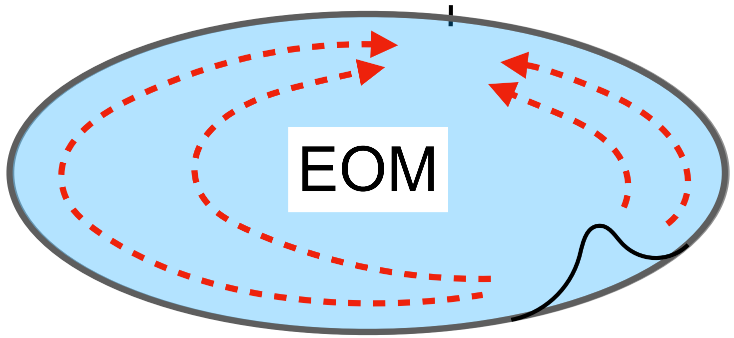
$$\dot{\rho} = -i[H, \rho]$$

$$\Phi \underset{r \to \infty}{\sim} r^{\Delta - d} J + r^{-\Delta} \langle O \rangle_J$$

Lindblad力学の場合



=



$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \gamma \left[O \rho O^\dagger - \frac{1}{2} \{ O^\dagger O, \rho \} \right]$$

$$\Phi \underset{r \to \infty}{\sim} r^{\Delta - d} (J + \lambda) + r^{-\Delta} \langle O \rangle_{J+\lambda}$$

$$\langle O \rangle_J = \overline{\langle O \rangle_{J+\lambda}}$$

λ：ホワイトノイズ

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3はCFTの結果を再現

応用のアイデア募集中！

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3はCFTの結果を再現

応用のアイデア募集中！

Lindblad＝開放系のマスター方程式

$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \underbrace{\sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right]}_{\text{孤立系との違い}} =: \mathscr{L}\rho$$

（しばらく、1次元量子系で$L_i = L_i(x)$の形を仮定）

- 系＋熱浴から熱浴をトレースアウトして、近似
  - Born近似：$\rho_{\mathrm{tot}} \simeq \rho_{\mathrm{sys}} \otimes e^{-\beta H_{\mathrm{bath}}}$
  - Markov近似：$\rho(t+\Delta t)$は$\rho(t)$だけで決まる
  - …
- $\rho(t) = e^{(t-s)\mathscr{L}}\rho(s)$はCPTP写像の一般形

考えるべき（時間順序）相関関数は？

$$\boxed{\langle \mathrm{T} O(t_n)\cdots O(t_1)\rangle = \mathrm{Tr}\left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathscr{L}} O \cdots O e^{(t_1 - t_0)\mathscr{L}} \rho(t_0)\right]}$$

$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}\right] =: \mathscr{L}\rho$$

なぜ？　→　系＋熱浴から出発する

$$\langle \mathrm{T} O(t_n)\cdots O(t_1)\rangle := \mathrm{Tr}_{\mathrm{tot}}\left[O e^{-i(t_n - t_{n-1})H_{\mathrm{tot}}} O \cdots O e^{-i(t_1 - t_0)H_{\mathrm{tot}}} \rho_{\mathrm{tot}}(t_0)\right]$$

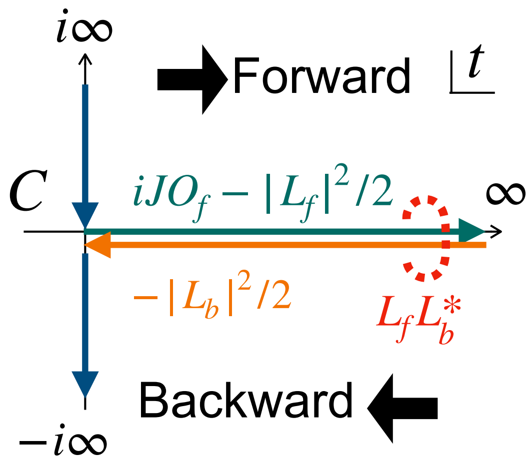
$$\simeq \mathrm{Tr}_{\mathrm{sys}}\left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathscr{L}} O \cdots O e^{(t_1 - t_0)\mathscr{L}} \rho_{\mathrm{sys}}(t_0)\right]$$

Lindbladの導出に使った近似　　　cf) Gullo et. al. (2014)

非時間順序も同様

この相関関数を与える生成汎関数は？

$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right] =: \mathscr{L}\rho$$



L_iが1種類で、$\rho_{\mathrm{ini}} = |0\rangle\langle 0|$

$$\boxed{Z[J] := \int \mathscr{D}x \; e^{iS[C;x] + \int_0^\infty dt \left(iJO_f + L_f L_b^* - \frac{|L_f|^2}{2} - \frac{|L_b|^2}{2} \right)}}$$

e.g. [Strunz (1997)]

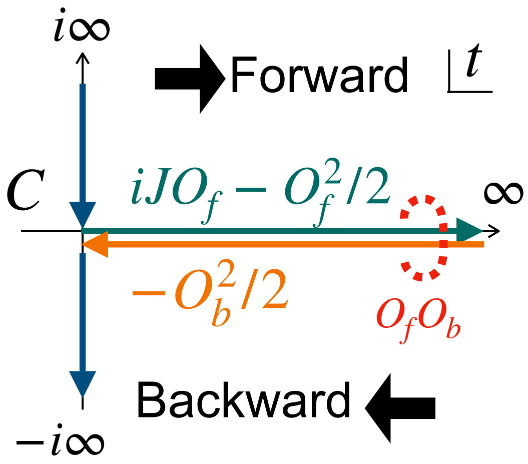
$$L_f := L[x_f(t)]$$

時間が余れば板書で導出します

- 虚時間方向は真空を作る
- Forwardは$|0\rangle$の時間発展
- Backwardは$\langle 0|$の時間発展
- JはOの$\langle \mathrm{T} O(t_n) \cdots O(t_1) \rangle$を作るために導入
- 真空以外はソース入れるなど...

以下ではCFTの場合

$$\boxed{Z[J] := \int \mathscr{D}\phi \; e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)}}$$



$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \gamma \int d^{d-1}\vec{x} \left[O(\vec{x})\rho O(\vec{x}) - \frac{1}{2}\{O(\vec{x})^2, \rho\} \right]$$

ただし簡単のため、

- $L_i \to \sqrt{\gamma} O[\phi(\vec{x})]$ （添え字iが空間座標$\vec{x}$）
- $O(\vec{x}) = O[\phi(\vec{x})]$は実スカラープライマリー場
- ジャンプ演算子の相関関数に着目

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

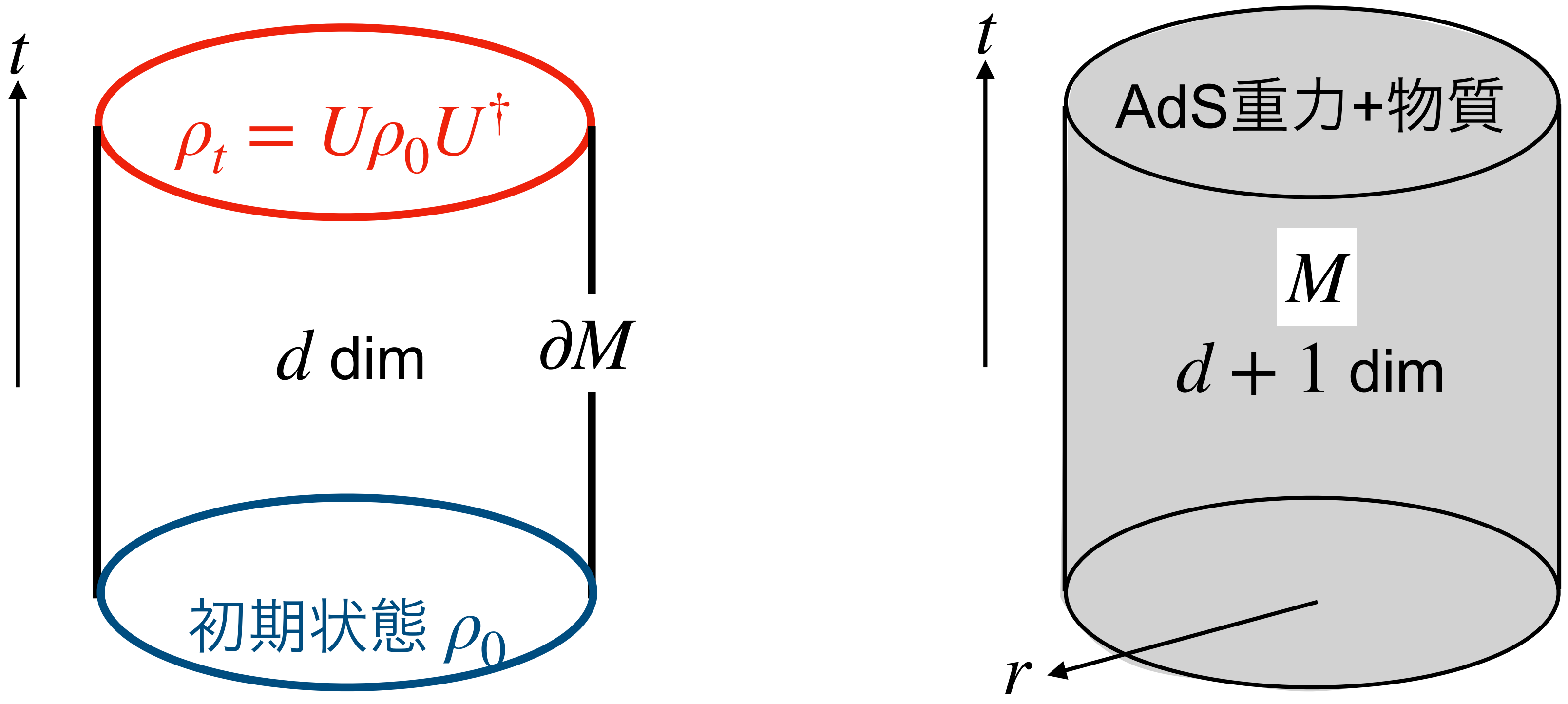
1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3はCFTの結果を再現

応用のアイデア募集中！

標準的なAdS/CFT：GKPW辞書

AdS/CFT対応

$$\int \mathscr{D}\phi \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[\partial M;\phi]+i\int \mathrm{d}^d x\, J(x) O_\Delta(x)} = e^{iS_{\mathrm{AdS}}[M;\Phi_{\mathrm{cl}}]}\Big|_{\Phi\sim r^{\Delta-d}J}$$



Mはかなり自由：SK経路、レプリカ多様体など

$Z[J]$をGKPWが使える形へ

Lindblad力学の場合

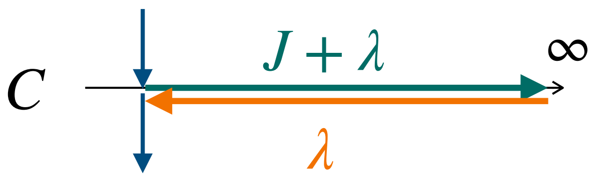
$$\boxed{Z[J] := \int \mathscr{D}\phi \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)}}$$

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}\eta \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int \left[iJO_f - \frac{\gamma}{2}\eta^2 + i\lambda\{\eta - (O_b - O_f)\} \right]}$$

$$= \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}\eta \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J+\lambda)O_f - i\lambda O_b - \frac{\gamma}{2}\eta^2 + i\lambda\eta \right]}$$

$$= \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}\eta \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J+\lambda)O_f - i\lambda O_b - \frac{\gamma}{2}(\eta - i\lambda/\gamma)^2 - \frac{1}{2\gamma}\lambda^2 \right]}$$

$$= \int \mathscr{D}\lambda \left[\underline{\int \mathscr{D}\phi \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J+\lambda)O_f - i\lambda O_b \right]}} \right] e^{-\frac{1}{2\gamma}\int \lambda^2}$$



$\lambda \sim \mathscr{N}(0,\gamma)$

GKPWを使ってバルクへ

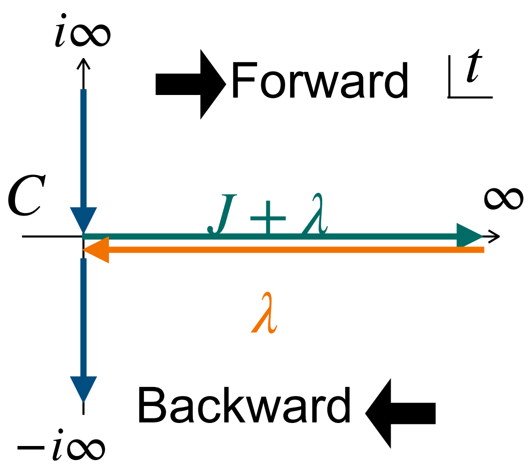
$$Z[J] = \int \mathscr{D}\lambda \left[\left[\int \mathscr{D}\phi \; e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J+\lambda)O_f - i\lambda O_b \right]} \right] \right] e^{-\frac{1}{2\gamma}\int \lambda^2}$$

$$= \int \mathscr{D}\lambda e^{-\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x}\ \lambda(t,\vec{x})^2} \left[e^{iS_{\mathrm{AdS}}[M;\Phi]} \right]_{\Phi_f \sim r^{\Delta-d}(J+\lambda),\ \Phi_b \sim r^{\Delta-d}\lambda}$$

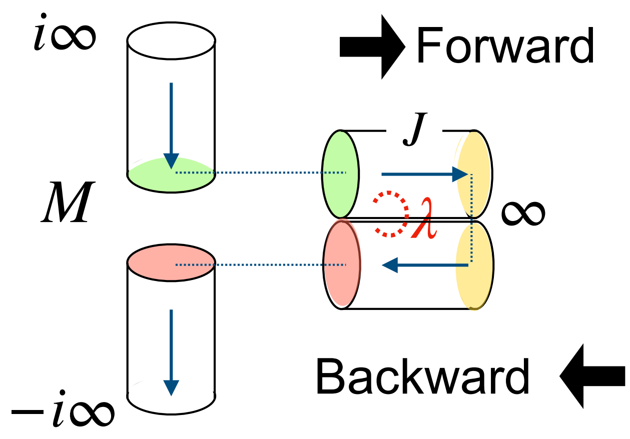
$$\partial M \cong C \times [\vec{x} - \text{directions}]$$

M上でいつもの古典場の計算

最後にλについてガウス平均



CFT



AdS

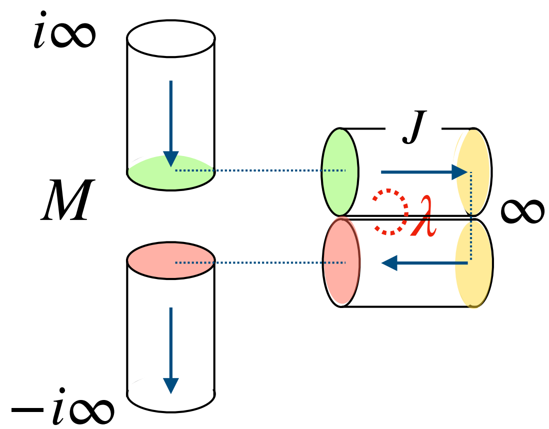
Lindblad力学のホログラフィック双対

$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \gamma \int d^{d-1}\vec{x} \left[O(\vec{x})\rho O(\vec{x}) - \frac{1}{2}\{O(\vec{x})^2, \rho\} \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z[J] &:= \int \mathscr{D}\phi \, e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)} \\ &= \int \mathscr{D}\lambda \, e^{-\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x}\, \lambda(t,\vec{x})^2} \left[e^{iS_{\mathrm{AdS}}[M;\Phi]} \right]_{\Phi_f \sim r^{\Delta-d}(J+\lambda),\ \Phi_b \sim r^{\Delta-d}\lambda} \end{aligned}}$$

$$\mathrm{Tr}\left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathscr{L}} O \cdots O e^{(t_1 - t_0)\mathscr{L}} \rho(t_0) \right]$$

$$= \left\langle e^{-iS[M;\Phi]} \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_n)} \cdots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_n)} e^{iS[M;\Phi]} \Bigg|_{J=0} \right\rangle_\lambda$$



Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3はCFTの結果を再現

応用のアイデア募集中！

プローブ自由スカラー場 on AdS$_3$

$$S_{\mathrm{AdS}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\partial\Phi)^2 - \Delta(2-\Delta)\Phi^2\right] + S_{\mathrm{bdy}}$$

$$ds^2 = -(r^2+1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2+1} + r^2 d\theta^2$$

- λを固定してそれぞれでEOMを解く
- 場を「滑らかに」繋ぐ

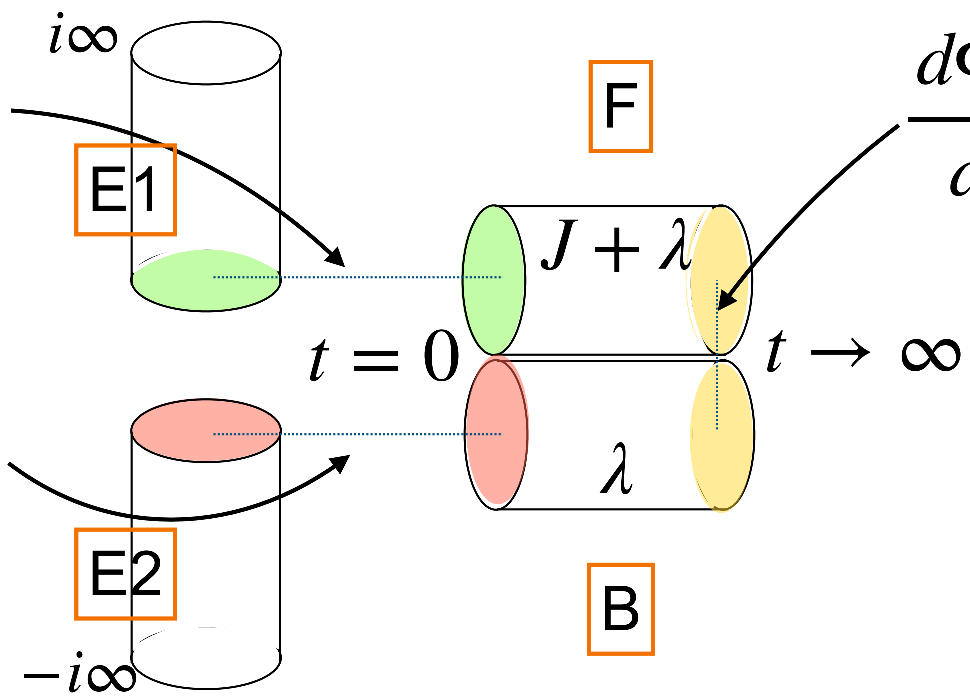
$e^{iS_{\mathrm{AdS}}[M;\Phi]}$に代入して λ積分を実行

Skenderis, van Rees (2008)

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{E1}}}{d(-i\tau)} = \frac{d\Phi_{\mathrm{F}}}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{E2}}}{d(-i\tau)} = \frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{F}}}{dt} = \frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt}$$



AdSからCFTへの予言：１・２点相関関数

１点相関関数

$$\langle O(t,\theta)\rangle = 0$$

$$F(t,\theta) \propto [\cos(t - i\epsilon) - \cos\theta]^{-\Delta}$$

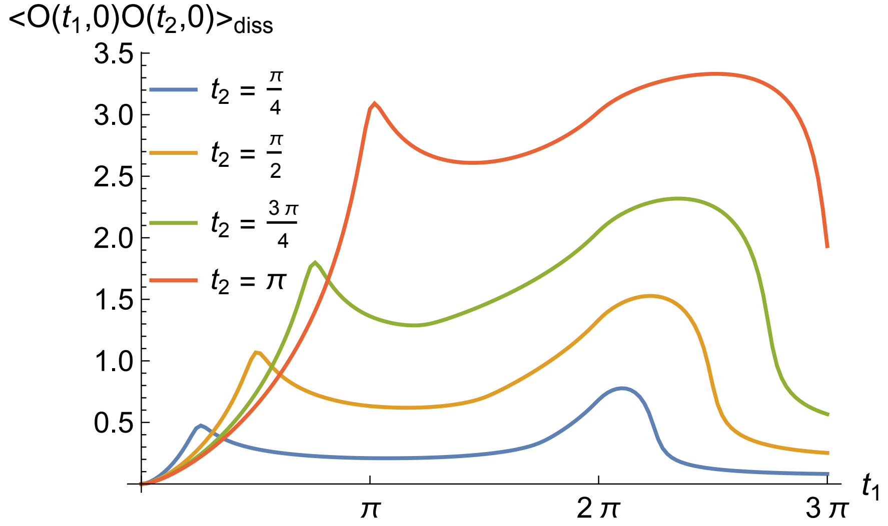
ユニタリ部分

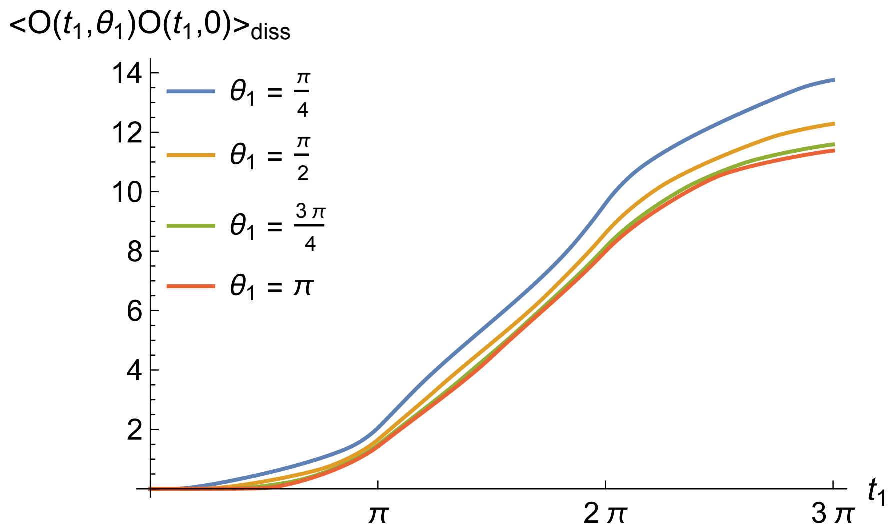
２点相関関数（$t_2 \geq t_1$）

拡散部分

$$\langle O(t_2,\theta_2)O(t_1,\theta_1)\rangle = F(t_2 - t_1, \theta_2 - \theta_1)$$
$$-\gamma \int_0^{t_1} dt \int d\theta\, [F(t_1 - t, \theta_1 - \theta) - F(t - t_1, \theta - \theta_1)]$$
$$\times [F(t_2 - t, \theta_2 - \theta) - F(t - t_2, \theta - \theta_2)]$$

拡散部分の様子



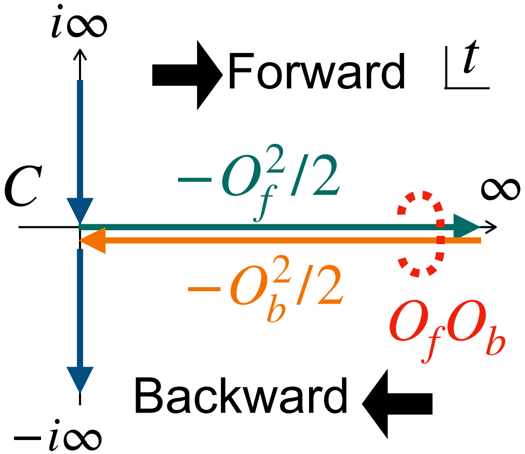


CFTの摂動計算と整合

今回の辞書が正しいか、ラージNのCFTで確認した

$$\langle \mathrm{T} O(x_2) O(x_1) \rangle = \int \mathscr{D}\phi \; O_f(x_2) O_f(x_1) e^{iS_{\mathrm{CFT}}[C;\phi] - \frac{\gamma}{2}\int d^2x (O_f - O_b)^2}$$

$$\simeq \langle \mathrm{T} O(x_2) O(x_1) \rangle_0 - \frac{\gamma}{2} \int_x \underline{\langle O_f(x_2) O_f(x_1) (O_f(x) - O_b(x))^2 \rangle_0}$$



fはbより右へ

f（b）同士は（反）時間順序

４点をWickの定理で２点の積へと分解

→　バルクの結果に一致

バルクのプローブ近似　＝　CFTの$O(\gamma^1)$

（AdSの近傍）　　　　（真空の近傍）

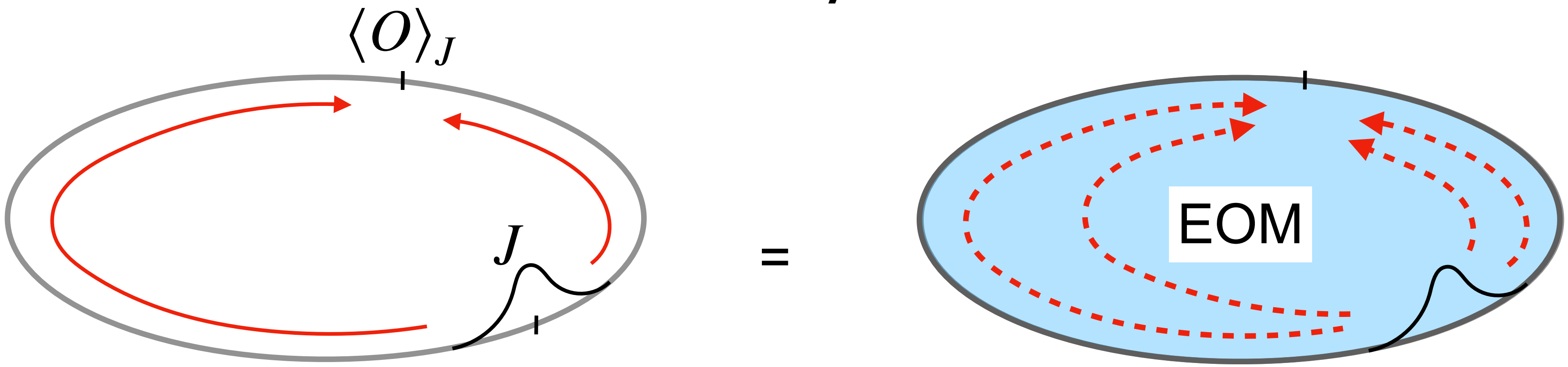
Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3はCFTの結果を再現

応用のアイデア募集中！

Lindblad＝AdS重力＋ホワイトノイズBC

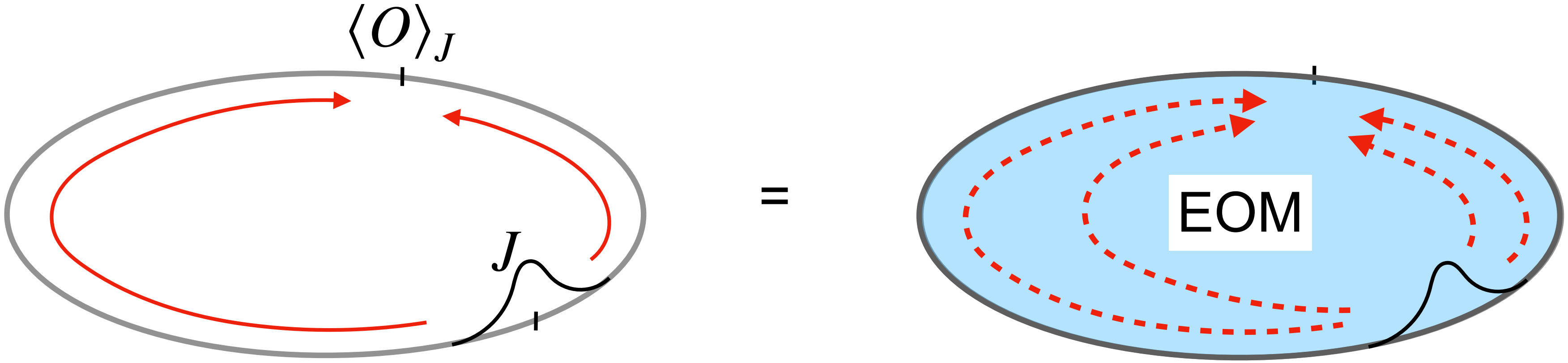
通常のAdS/CFT



$\dot{\rho} = -i[H,\rho]$

$$\Phi \underset{r\to\infty}{\sim} r^{\Delta-d} J + r^{-\Delta}\langle O \rangle_J$$

Lindblad力学の場合



$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \gamma\left[O\rho O^\dagger - \frac{1}{2}\{O^\dagger O, \rho\}\right]$$

$$\Phi \underset{r\to\infty}{\sim} r^{\Delta-d}(J+\lambda) + r^{-\Delta}\langle O \rangle_{J+\lambda}$$

$$\langle O \rangle_J = \overline{\langle O \rangle_{J+\lambda}}$$

λ：ホワイトノイズ

応用のアイデア募集中！

竹田が面白いと思う方向性

- 熱力学第二法則をBH熱力学へ翻訳
  - ホログラフィックエントロピー公式はどう変更される？
  - 系全体のエントロピーは時間発展
  - LindbladはMarkovianなので第二法則は単位時間ごと
- ホライズン形成
  - 純粋状態から始めても、瞬時に混合状態へ
  - バルクではホライズンができる？

非平衡への応用は何が面白いですか？