開弦の場の理論の*KBc*セクターにおける多様体の構造

畑浩之氏との共同研究[arXiv:2103.10597]に基づく

2021年三者若手夏の学校

2021年8月　発表者：竹田 大地

目次

- イントロダクション
- Witten の作用
- *KBc* 多様体
- 結論と展望

イントロダクション

- 開弦の場の理論とは何か，なぜ必要か (1)
- 今日の概要(1)

開弦の場の理論とは何か，なぜ必要か

ここでは**ボソン開弦の場の理論に限る.**

開弦の場の理論 → 開弦理論を第二量子化した理論

$$\hat{X}^{\mu}(0,\sigma)\,|\,X\rangle = X^{\mu}(\sigma)\,|\,X\rangle$$

力学変数　$\Psi(X(\sigma)) = \langle X\,|\,\Psi\rangle$

世界面CFTの
ゴースト数1の状態

なぜ必要か？

第二量子化では. . .

- 作用に相互作用項が導入できる.
- 真空を探す原理がある.

今日の概要

Witten型の開弦の場の理論を(少し丁寧に)レビューした後に…

開弦の場の理論はChern-Simons理論と類似の構造を持つ.

→　まだ知られていない対応関係があるか？

⇓

真空や古典解の議論で重要な *KBc* セクターに制限して,

多様体の構造を導入する.

⇓

- 古典解から古典解を無数に得られる
- Wilson lineの対応物が作れる

Witten の作用

- 力学変数：弦場 (1)
- 積分の意味 (1)
- 古典解と *KBc* 代数 (2)

力学変数：弦場

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi^3\right)$$

⇨ Ψ はsliver座標の複合演算子

$\hat{X}^\mu(0,\sigma)\,|X\rangle = X^\mu(\sigma)\,|X\rangle$

$$\Psi(X(\sigma)) = \langle X\,|\,\Psi\rangle$$

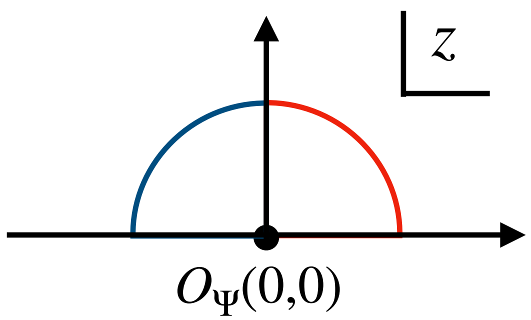
世界面CFTの
ゴースト数1の状態

⇨

状態演算子対応

$$|\Psi\rangle = O_\Psi(0,0)\,|0\rangle$$

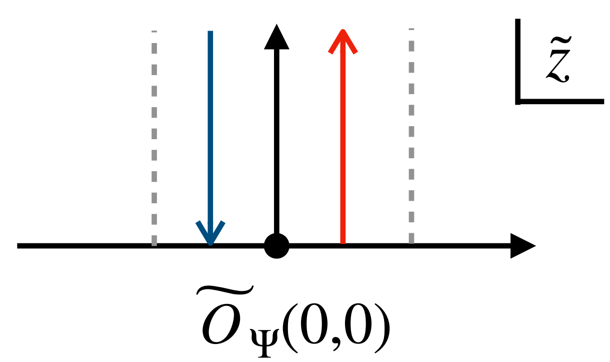
動径座標



$$\boxed{\tilde{z} = \frac{2}{\pi}\arctan z}$$

sliver座標

⇨



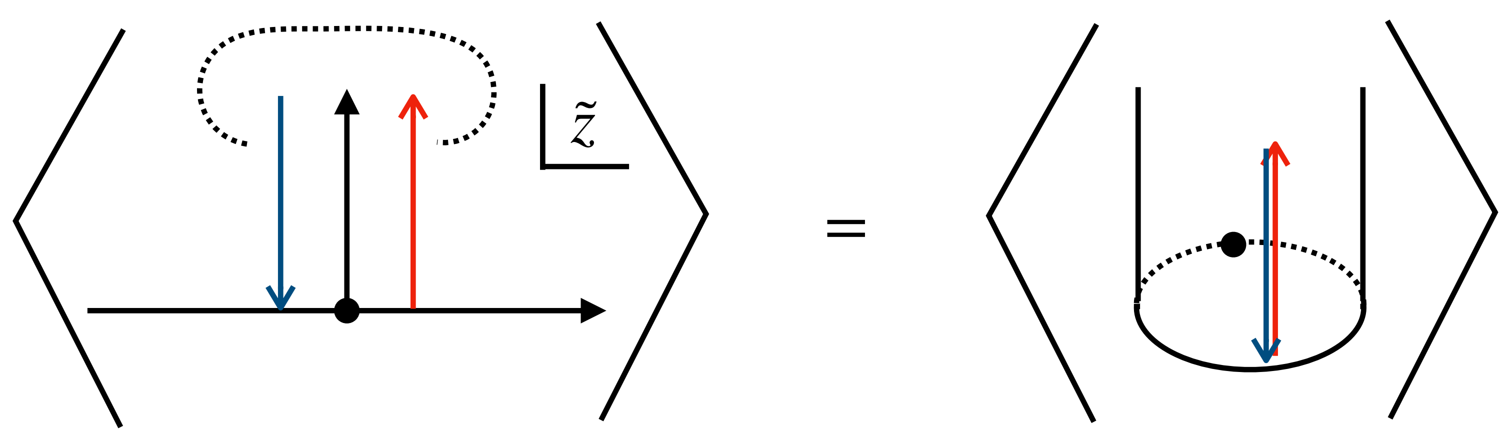
積分の意味

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\underbrace{\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi}_{\text{運動項}} + \underbrace{\frac{1}{3}\Psi^3}_{\text{相互作用項}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{この}\int\text{は相関関数}}$$

弦の左右をくっつけて**世界面CFTの相関**をとる

$$\int \Psi =$$



古典解と *KBc* 代数 1/2

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi^3\right)$$

古典解： $\boxed{Q_{\mathrm{B}}\Psi + \Psi^2 = 0}$

古典解を探す　→　異なる開弦理論(CFT)の摂動真空を探す

さまざまな古典解が計算できれば. . .

- Dブレーンの生成，消滅の記述
- 異なる背景への理論の移行(背景独立性)

が弦の場の理論では扱える事になる.

古典解と *KBc* 代数 2/2

K, B, c の定義

$$K := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{2\pi i} T(\tilde{z}), \quad B := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{2\pi i} b(\tilde{z}), \quad c := c^{\tilde{z}}(0) = \frac{2}{\pi} c^{z}(0)$$

***KBc* 代数** (この代数は閉じる)

$$[K, B] = B^2 = c^2 = 0, \quad \{B, c\} = 1, \quad (\ [K, c] = -\partial c\ )$$

$$Q_{\mathrm{B}} K = 0, \quad Q_{\mathrm{B}} B = K, \quad Q_{\mathrm{B}} c = cKc$$

古典解は $\Psi = F(K, B, c)$ の形で探されてきた.
$\rightarrow$ そのような解はユニバーサル！

EOM
$Q_{\mathrm{B}}\Psi + \Psi^2 = 0$

KBc 多様体

- Wittenの作用とChern-Simonsの作用(1)
- 内部積とLie微分(2)
- 多様体(2)
- 多様体の導入による利点(1)

Wittenの作用とChern-Simonsの作用

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi^3\right)$$

Ψ はゴースト数1

ゲージ変換：$\Psi \to V^{-1}(Q_{\mathrm{B}} + \Psi)V$

Chern-Simons理論

$$S_{CS} \sim \int_M \left(\frac{1}{2}A\mathrm{d}A + \frac{1}{3}A^3\right)$$

A は1フォーム

ゲージ変換：$\Psi \to g^{-1}(\mathrm{d} + A)g$

対応関係

$\mathrm{d} = Q_{\mathrm{B}}$, $\quad \int_M \leftrightarrow \int$, $\quad$ フォーム ↔ ゴースト, $\quad$ ゲージ変換

SFTとSCの対応関係を広げたい → *KBc* セクターに限って探せないか？

[H.Hata, DT (2021)]

内部積とLie微分 1/2

内部積 I を探す

通常の内部積はフォームを1下げる

仮定

$(-1)^{|A|} = \begin{cases} 1 & \text{(even)} \\ -1 & \text{(odd)} \end{cases}$

- I はゴースト数が-1
- (反)Leibniz則 ：$I(AB) = (IA)B + (-1)^{|A|}A(IB)$
- べき零性：$I^2 = 0$

通常の内部積と同じ

- double-conjugation property：$(IA)^\ddagger = -(-1)^{|A|}IA^\ddagger$
- (反)交換関係を保つ：例えば $\{B, c\} = 1$ に対して $I(\{B, c\}) = I(1)$

Q_B と同じく

代数の無矛盾性

⇨ I は K の2成分実関数 $X = (X^1(K), X^2(K))$ で特徴付けられる.

$$I_X K = iBX^1, \quad I_X B = 0, \quad I_X c = \frac{X^2}{K} + \left[\frac{X^2}{K}, Bc\right]$$

内部積とLie微分 2/2

他の満たすべき性質を満たすか？　→　満たす

$$\{I_X, I_Y\} = 0, \quad I_{\alpha X+\beta Y} = \alpha I_X + \beta I_Y$$

Lie微分：$L_X := -i\{Q_\mathrm{B}, I_X\}$

満たすべき性質を満たすか？　→　対応 $\mathrm{d} \leftrightarrow Q_\mathrm{B}$ の下で満たす

$$[L_X, Q_\mathrm{B}] = 0, \quad [L_X, I_Y] = [I_X, L_Y], \quad L_X(AB) = (L_X A)B + AL_X B, \quad L_{\alpha X+\beta Y} = \alpha L_X + \beta L_Y$$

通常のように $[L_X, I_Y] = I_{[X,Y]}$, $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$ が成り立つか？

→　$[X, Y] := (X^1 K\partial Y^1 - Y^1 K\partial X^1, X^1 K\partial Y^2 - Y^1 K\partial X^2)$ の下で成り立つ.

$$\boxed{\partial := \frac{\partial}{\partial K}}$$

Lieブラケットになる
ことが示せる

多様体 1/2

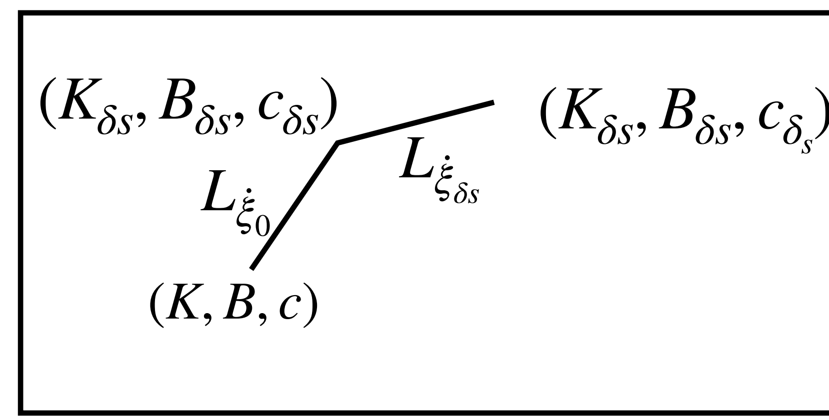
$(1+L_X)(K,B,c)$ は再び *KBc* 代数を満たす

→ Lie微分を使って様々な *KBc* 代数が得られる！

パラメータs を用いて (K,B,c) を関数 $\xi_s=(\xi_s^1(K),\xi_s^2(K))$ を用いたLie微分で発展させる.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(K_s,B_s,c_s)=L^{(s)}_{\dot{\xi}_s}(K_s,B_s,c_s),\quad (K_0,B_0,c_0)=(K,B,c)$$

例：$L_XK=X^1K \;\to\; L^{(s)}_{\dot{\xi}_s}K_s=\dot{\xi}_sK_s$



$$\boxed{K_s=e^{\xi_s^1}K,\quad B_s=e^{\xi_s^1}B,\quad c_s=e^{-i\xi_s^2}ce^{-\xi_s^1}Bce^{i\xi_s^2}}$$

終点だけによる！

多様体 2/2

$$\boxed{K_s = e^{\xi_s^1}K, \quad B_s = e^{\xi_s^1}B, \quad c_s = e^{-i\xi_s^2}ce^{-\xi_s^1}Bce^{i\xi_s^2}}$$

終点だけによる！

そこで

点：様々な *KBc* + Q_{B} 代数

座標：$\xi = (\xi^1(K), \xi^2(K))$ ⇒ *KBc* 多様体

の集まりを多様体のようなものと思える.

各点の(K, B, c)

$$\boxed{K(\xi) = e^{\xi^1}K, \quad B(\xi) = e^{\xi^1}B, \quad c(\xi) = e^{-i\xi^2}ce^{-\xi^1}Bce^{i\xi^2}}$$

内部積 I_X ,　Lie微分 L_X

⇒ 各点 ξ ごとに $(K(\xi), B(\xi), c(\xi))$ を *KBc* 代数とみなして

$I_X^{(\xi)}, L_X^{(\xi)}$ へ拡張

原点　　　ξ

例：$L_X K = X^1 K \ \rightarrow \ L_X^{(\xi)}K(\xi) = XK(\xi)$

多様体の導入による利点

古典解を多様体にのせる

KBc で作られた古典解 $\Psi \quad \to \quad \Psi(\xi) := \Psi\Big|_{(K,B,c)\to(K(\xi),B(\xi),c(\xi))}$ も必ず古典解

$\because$ 古典解かどうかは *KBc* 代数で決まる

Wilson line
通常

$$W_C = \mathrm{P}\exp\left[\int_C A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu\right] = \mathrm{P}\exp\left[\int_a^b \mathrm{d}t\ i_{\dot{x}(t)}A(x(t))\right], \qquad i_x : \text{通常の内部積}$$

KBc 版をアナロジーで作れる

$$W_C = \mathrm{P}\exp\left[\int_a^b \mathrm{d}t\ \underbrace{I^{(\xi(t))}_{\dot{\xi}(t)}\Psi(\xi(t))}_{\text{ゴースト数0}}\right]$$

まとめと展望

- まとめ(1)
- 今後考えたいこと(1)

まとめ

KBc 多様体の構成

統一的に書くなら. . .

1. $K(\xi) = e^{\xi^1}K, \quad B(\xi) = e^{\xi^1}B, \quad c(\xi) = e^{-i\xi^2}ce^{-\xi^1}Bce^{i\xi^2}$ は KBc 代数を満たす.
2. ξ を座標だと思って各点に $(K(\xi), B(\xi), c(\xi))$ が住む KBc 多様体を考える.
3. 接ベクトル(場) X, 内部積 $I_X^{(\xi)}$, Lie微分 $L_X^{(\xi)}$ が適切に定義できる.

結果

- 古典解から古典解を無数に得られる.
- Wilson line が構成できる.

今後考えたいこと

多様体の物理的意味

$(K(\xi), B(\xi), c(\xi))$ は別のCFTの (K, B, c) と思える？

$\rightarrow$　CFTが住む多様体へと拡張可能か？

Wilson line, loop
ここで定義した Wilson line はそれなりに通常のものと性質を共有.

しかし...

　　Wilson loop を作ると一般の Ψ についてはゲージ不変ではない.

多重Dブレーン解

Dpブレーン1枚系においてDpブレーン N 枚のエネルギーと非可換ゲージの励起を与える古典解を探す.

バックアップ

力学変数：弦場

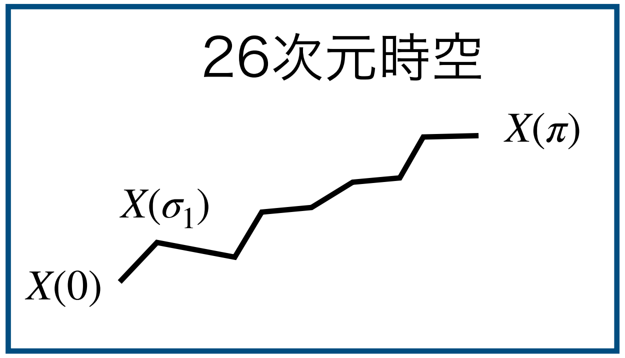
イントロダクションにて → 力学変数は弦場 $\Psi[X]$

弦場は第一量子化のCFTのFock空間の状態についての波動関数

$$\Psi[X] = \langle X | \Psi \rangle, \quad \hat{X}^\mu(0,\sigma)|X\rangle = X^\mu(\sigma)|X\rangle, \quad 0 \le \sigma \le \pi$$

多重局所的：離散化すると考えやすい.

$0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_N < \pi$ と離散化して $\Psi[X(0), X(\sigma_1), \cdots, X(\sigma_N), X(\pi)]$

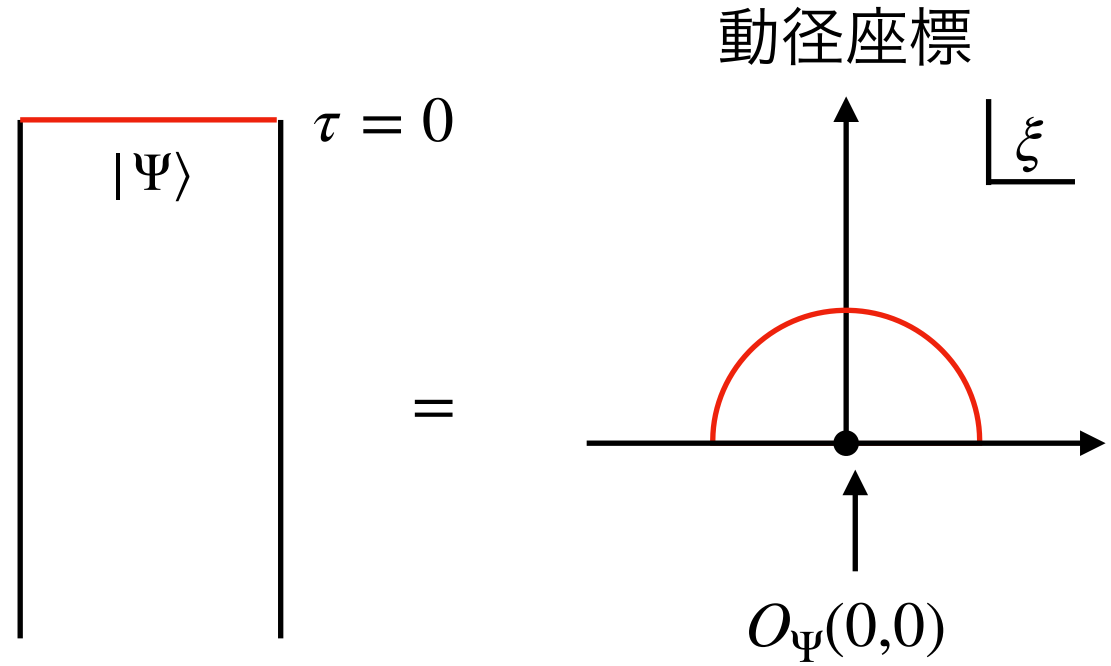


力学変数の取り替え

状態演算子対応： $|\Psi\rangle = O_\Psi(0,0)|0\rangle$

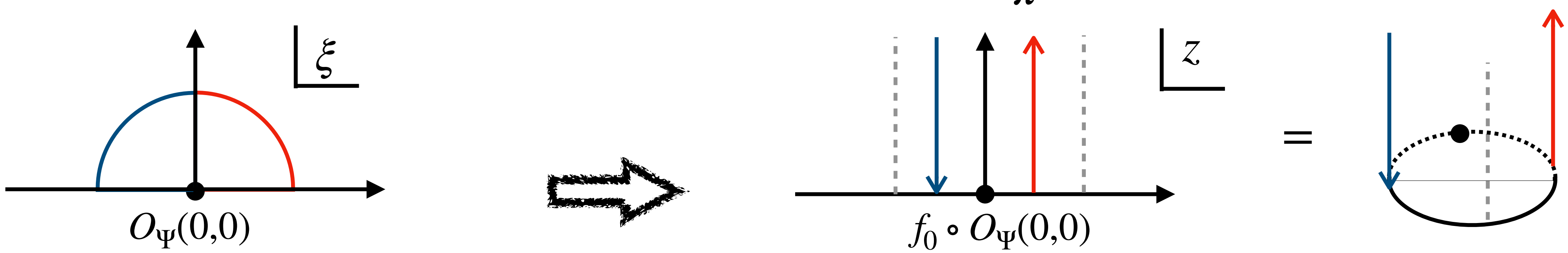
⇨ 力学変数を $O_\Psi(0,0)$ へ

以下省略



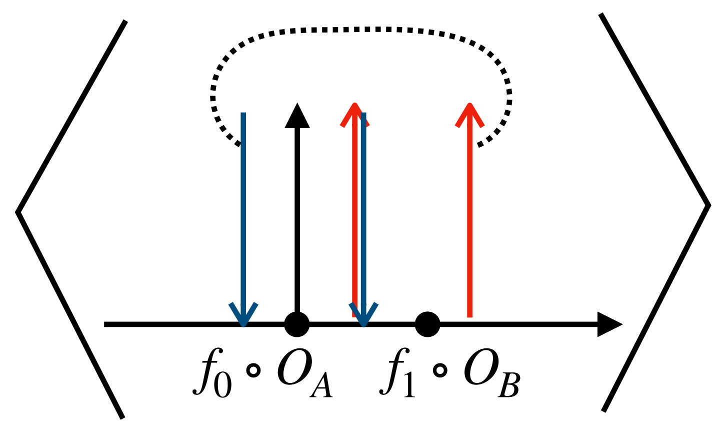
sliver座標と演算 1/2

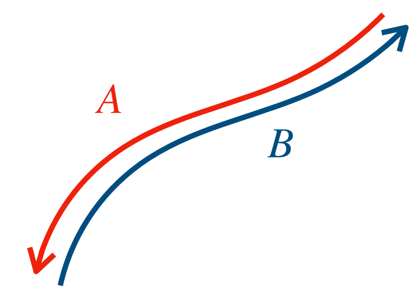
共形変換によってより便利な座標へ → sliver座標　$z = \dfrac{2}{\pi} \arctan \xi =: f_0(\xi)$



BPZ内積

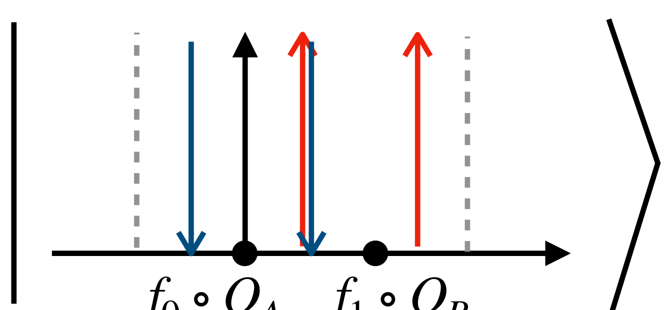
$\langle A \,|\, B \rangle := \langle \underbrace{f_0 \circ O_A f_1}_{=f_0+1} \circ O_B \rangle_{\underbrace{C_2}_{\text{長さ2の円筒}}}$ =

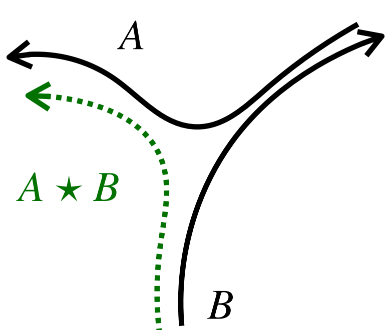




スター積

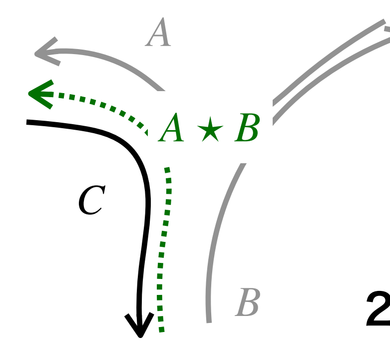
$| A \star B \rangle =$





厳密には任意の$|C\rangle$に対して

$\langle C \,|\, A \star B \rangle := \langle f_{-1} \circ O_C f_0 \circ O_A f_1 \circ O_B \rangle_{C_3}$



要約

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\underbrace{\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi}_{\text{運動項}} + \underbrace{\frac{1}{3}\Psi^3}_{\text{相互作用項}}\right)$$

これらの描像をうまく表せるように共形変換を行って相関を取る！

$\Psi := e^{-K/2}\widetilde{\mathcal{O}}_{\Psi}(0,0)e^{-K/2}$ に対するEOM

$$\boxed{Q_{\mathrm{B}}\Psi + \Psi^2 = 0}$$

によって古典解(摂動真空)は議論できる.

sliver座標と演算 2/2

doubling trickを使って定義される

$$K := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} T(z) \longleftarrow \text{ストレステンソル}$$

は並進の生成子：$[K, \varphi(z)] = -\partial\varphi(z).$

力学変数を

$$\Psi := e^{-K/2} f_0 \circ O_\Psi e^{-K/2}$$

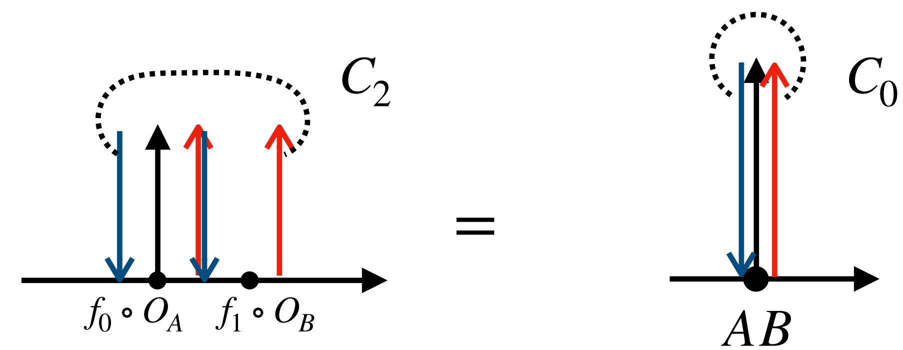
に変更

BPZ内積

$$A := e^{-K/2} f_0 \circ O_A e^{-K/2}$$

$$\langle A \,|\, B \rangle = \langle f_0 \circ O_A f_1 \circ O_B \rangle_{C_2} = \lim_{\epsilon \to 0} \langle AB \rangle_{C_\epsilon}$$

$$\langle C \,|\, A \star B \rangle = \langle f_{-1} \circ O_C f_0 \circ O_A f_1 \circ O_B \rangle_{C_3} = \lim_{\epsilon \to 0} \langle CAB \rangle_{C_\epsilon}$$



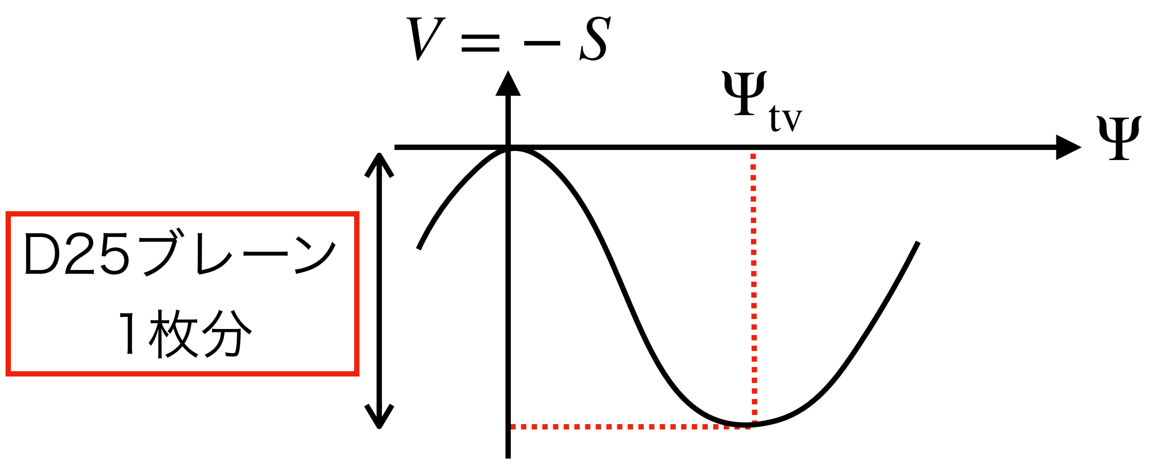
形式的な記号として $\int A = \langle f_0 \circ O_A \rangle_{C_1} = \langle A \rangle_{C_0}$ を導入.

他の真空を探す

EOMの解として**静的**なもの　→　場の古典的な配位

タキオン真空解(Erler-Schnabl解)

$$\Psi_{\mathrm{tv}} = \frac{1}{\sqrt{1+K}} c(1+K)Bc \frac{1}{\sqrt{1+K}}$$



→ ポスター発表の方を是非！

他には. . .

・D25ブレーンN枚のエネルギーを与える解(村田-Schnabl解)

・一般解!? (*KBc* 代数 + 境界変更演算子, Erler and Maccaferri (2014,19))

様々な真空周りの理論と共形場理論

ある古典解Ψ_0 (*KBc*とは限らない)に対して $\Psi = \Psi_0 + \Phi$ とする.

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Phi \underline{Q_{\Psi_0}}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^3\right)$$

$Q_{\Psi_0} := Q_{\mathrm{B}} + \{\Psi_0, \bullet\}$

相手がGrassmann偶
なら交換子

Ψ_0 を真空とした理論ではBRST演算子が変わる

→ BRSTコホモロジーが変わる　$|\mathrm{phys}\rangle \simeq |\mathrm{phys}\rangle + Q_{\Psi_0}|\quad\rangle$

→ 世界面の共形場理論として異なるものから出発して定式化した理論になる？

$\boxed{\text{一般に}\quad \Psi_0 \leftrightarrow \mathrm{CFT}_{\Psi_0}\quad \text{(1対1)}\quad \text{が信じられている}}$

例：タキオン真空解$Q_{\Psi_{\mathrm{tv}}}$

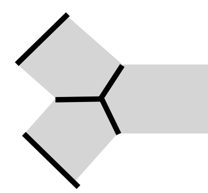
BRSTコホモロジーが消える → 開弦の励起がない！

Erler-Maccaferriの一般解
(境界変更演算子)

Wittenの作用

Wittenの作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\underbrace{\frac{1}{2}\Psi Q_\mathrm{B}\Psi}_{\text{運動項}} + \underbrace{\frac{1}{3}\Psi^3}_{\text{相互作用項}}\right) = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi|Q_\mathrm{B}|\Psi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Psi|\Psi\star\Psi\rangle\right)$$



Ψ はゴースト数1

ゲージ変換：$\Psi \to V^{-1}(Q_\mathrm{B}+\Psi)V$

Chern-Simons理論の形：$S_{CS} \sim \int_M \left(\frac{1}{2}A\mathrm{d}A + \frac{1}{3}A^3\right)$

対応関係

$\mathrm{d} = Q_\mathrm{B}$,

$\int_M \leftrightarrow \int$,

フォーム数 $\leftrightarrow$ ゴースト数,

$[A \to g^{-1}(\mathrm{d}+A)g] \;\leftrightarrow\; [\Psi \to V^{-1}(Q_\mathrm{B}+\Psi)V]$

演算

ゲージ変換

⇨ より深い対応関係はあるか？

H.Hata, DT (2021)
(後半)

今後考えたいこと

多様体の物理的意味

Ψ_0 を古典解とすると $\Psi_0(\xi)$ も古典解

$\boxed{\text{一般に　古典解 } \Psi_0 \leftrightarrow \mathrm{CFT}_{\Psi_0} \text{　(1対1)　が信じられている}}$

→　CFTが住む多様体へと拡張可能か？

(Erler-Maccaferriの一般解や境界変更演算子との関係)

Wilson line, loop

ここで定義した Wilson line はそれなりに通常のものと性質を共有.

しかし…

Wilson loop を作ると一般の Ψ については**ゲージ不変ではない**.

多重Dブレーン解

Dpブレーン1枚系においてDpブレーン N 枚のエネルギーと非可換ゲージの励起を与える古典解を探す.