開弦の場の理論のKBcセクターにおける内部積, Lie微分の構成とWilson line

竹田大地(京都大学)

畑氏との共同研究 arXiv: 2103.10597 に基づく

2021年9月16日

日本物理学会　秋季大会

目次

- 導入：開弦の場の理論の古典解と*KBc*代数
- *KBc* 多様体
- 展望

目次

- 導入：開弦の場の理論の古典解と*KBc*代数
- *KBc* 多様体
- 展望

開弦の場の理論における古典解

Witten の作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi^3\right)$$

$$\Longrightarrow$$

運動方程式

$$Q_{\mathrm{B}}\Psi + \Psi^2 = 0$$

Ψ : sliver座標のゴースト数1の複合演算子

古典解を探す　＝　他の摂動真空へ移行する (他のBCFT)

例：タキオン真空解

KBc 代数

K, B, c の定義

$$K := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{2\pi i} T(\tilde{z}), \quad B := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{2\pi i} b(\tilde{z}), \quad c := c^{\tilde{z}}(0) = \frac{2}{\pi} c^{z}(0)$$

(sliver 座標)

***KBc* 代数**

$$[K, B] = B^2 = c^2 = 0, \quad \{B, c\} = 1, \quad (\ [K, c] = -\partial c\ )$$

$$Q_{\mathrm{B}} K = 0, \quad Q_{\mathrm{B}} B = K, \quad Q_{\mathrm{B}} c = cKc$$

閉じている

KBc 代数を用いて作られた解 $\Psi = F(K, B, c)$
はユニバーサルである.

EOM
$Q_{\mathrm{B}}\Psi + \Psi^2 = 0$

目次

- 導入：開弦の場の理論の古典解と*KBc*代数
- *KBc* 多様体
- 展望

開弦の場の理論とChern-Simons理論

Witten の作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int\left(\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi^3\right)$$

Chern-Simons 作用

$$S_{CS} \sim \int_M \left(\frac{1}{2}A\mathrm{d}A + \frac{1}{3}A^3\right)$$

対応関係

$$Q_{\mathrm{B}} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{d}$$

$$\int \quad \leftrightarrow \quad \int_M$$

ghost $\leftrightarrow$ form

$$\Psi \to V^{-1}(Q_{\mathrm{B}} + \Psi)V \quad \leftrightarrow \quad A \to g^{-1}(\mathrm{d} + A)g$$ ゲージ変換

他の対応関係があるか ⇒ *KBc* セクターに限って存在する

[H.Hata, DT (2021)]

KBc 内部積の導入 1/2

内部積 I を探す

仮定

- I のゴースト数は -1 ⟵ ゴースト ↔ フォーム

- I は *KBc* 代数を壊さない

  ex) $I(\{B, c\}) = I(1)$ for $\{B, c\} = 1$

- $I(AB) = (IA)B + (-1)^{|A|}A(IB)$ ⟵ 通常の内部積が持つ Leibniz則を課す

KBc 内部積の導入 2/2

I は K の2成分関数 $X=(X_1(K),X_2(K))$ によって特徴づけられる：

$$\boxed{I_X K = iBX_1, \quad I_X B = 0, \quad I_X c = \frac{X_2}{K} + \left[\frac{X_2}{K}, Bc\right]}$$

$X=(X_1(K),X_2(K))$: *KBc* 接ベクトル

通常と同じ関係式が成り立つ(*KBc* セクターに対して)

$$I_X^2 = 0, \quad \{I_X, I_Y\} = 0, \quad I_{\alpha X+\beta Y} = \alpha I_X + \beta I_Y$$

KBc Lie 微分

KBc Lie 微分 通常のLie微分

$$L_X := -i\{Q_\mathrm{B}, I_X\} \longleftarrow \mathscr{L}_X = \{\mathrm{d}, I_X\}$$

置き換え $\mathrm{d} \leftrightarrow Q_\mathrm{B}$ の下で通常と同じ関係式が成り立つ

$$[L_X, Q_\mathrm{B}] = 0, \quad [L_X, I_Y] = [I_X, L_Y], \quad L_X(AB) = (L_X A)B + AL_X B, \quad L_{\alpha X+\beta Y} = \alpha L_X + \beta L_Y$$

他の期待される関係式 $[L_X, I_Y] = I_{[X,Y]}$, $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$

この関係式は $[X, Y]$ を次のもので置き換えると成り立つ：

$$[X, Y] := (X_1 K Y_1' - Y_1 K X_1', X_1 K Y_2' - Y_1 K X_2')$$ Lie ブラケット

$Y_1' = Y_1'(K)$

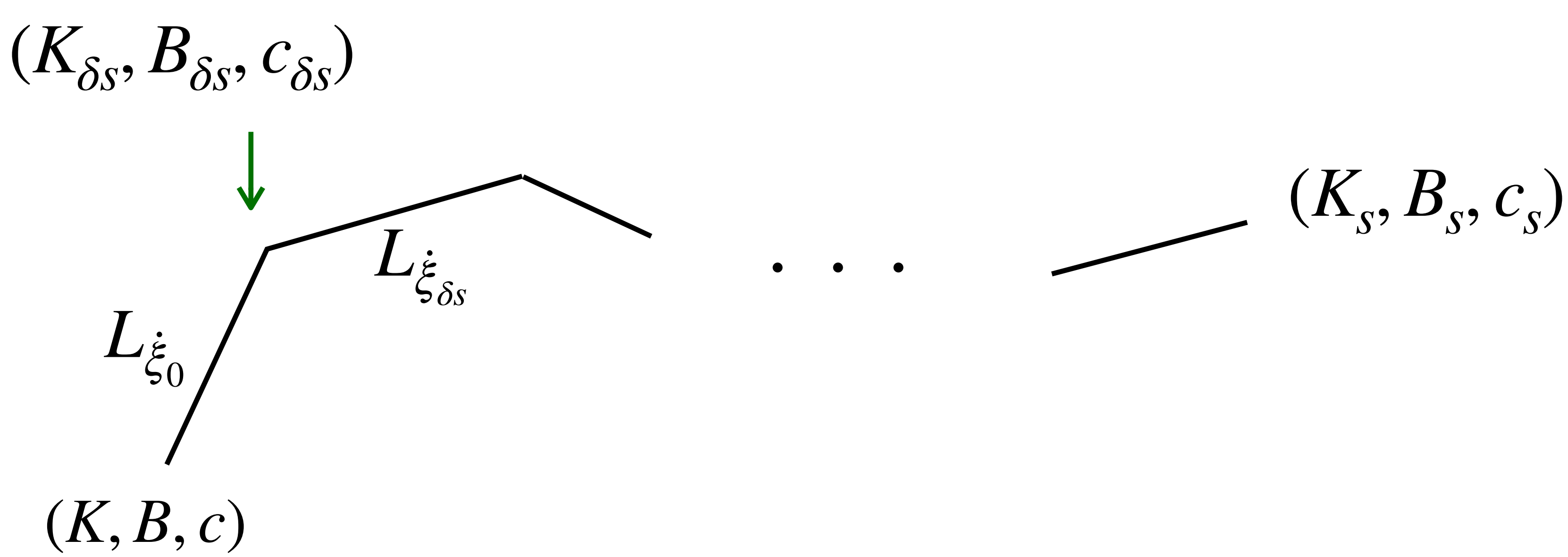
KBc 多様体 1/2

新しい組 $(1+L_X)(K,B,c)$ も再び KBc 代数を満たす.

そこで $\xi(s)=(\xi_1(s,K),\xi_2(s,K))$ によって与えられる微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(K_s,B_s,c_s)=L^{(s)}_{\dot\xi(s)}(K_s,B_s,c_s),\quad (K_0,B_0,c_0)=(K,B,c)$$

によって無数の KBc 代数が得られる.



解は端点だけに依存している

$$\boxed{K_s=e^{\xi_1(s,K)}K,\quad B_s=e^{\xi_1(s,K)}B,\quad c_s=e^{-i\xi_2(s,K)}ce^{-\xi_1(s,K)}Bce^{i\xi_2(s,K)}}$$

KBc 多様体 2/2

結局，(形式的には)任意の関数 ξ に対して次は *KBc* 代数を満たす：

$$K(\xi) = e^{\xi_1(K)}K, \quad B(\xi) = e^{\xi_1(K)}B, \quad c(\xi) = e^{-i\xi_2(K)}ce^{-\xi_1(K)}Bce^{i\xi_2(K)}$$

$$\boxed{\xi = (\xi_1(K), \xi_2(K))}$$

KBc 多様体

- 点 $\longrightarrow$ 異なる *KBc* 代数
- 座標 $\longrightarrow$ $\xi = (\xi_1(K), \xi_2(K))$

$Q_{\mathrm{B}},\ I_X,\ L_X$ は *KBc* 多様体の各点の演算へ $\longrightarrow$ $Q_{\mathrm{B}},\ \underline{I_X^{(\xi)},\ L_X^{(\xi)}}$

$(K(\xi), B(\xi), c(\xi))$
を基本の *KBc* と思う

目次

- 導入：開弦の場の理論の古典解と*KBc*代数
- *KBc* 多様体
- 展望

展望

古典解の多様体上の移動

$$\Psi(\xi) := \Psi\Big|_{(K,B,c)\to((K(\xi),B(\xi),c(\xi))}$$

Ψ が古典解のとき $\Psi(\xi)$ も再び解になる → 解を探す手続きになるか

Wilson line の構成

通常 $$W_C = \mathrm{P}\exp\left[\int_C A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu\right] = \mathrm{P}\exp\left[\int_a^b \mathrm{d}t\ \underline{i_{\dot{x}(t)}}A(x(t))\right]$$

M_3上の内部積

アナロジー $$W_C = \mathrm{P}\exp\left[i\int_a^b \underline{\mathrm{d}t\ I^{(\xi(t))}_{\dot{\xi}(t)}\Psi(\xi(t))}\right]$$

ghost number 0

似たような公式は成り立つが，ゲージ変換の振る舞いが良くない．