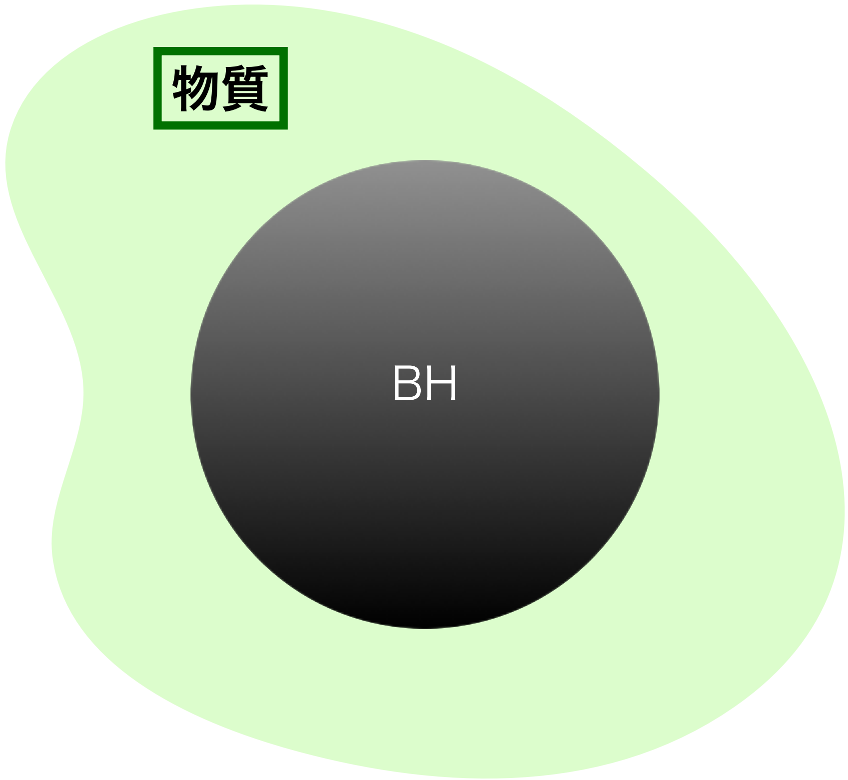
Coarse-graining black holes out of equilibrium with boundary observables on time slice

竹田 大地（京都大学D3）

arXiv:2403.07275（JHEP 05 (2024) 319）に基づく

2024/8/6 @ 場の理論と弦理論2024

これまで：エネルギー条件から第二法則へ



ブラックホール系のエントロピー

$$S \stackrel{?}{=} \frac{\text{Area}}{4G} + S_{\text{matter}}$$

ブラックホール熱力学第二法則

$\Delta S \geq 0$（証明：エネルギー条件）

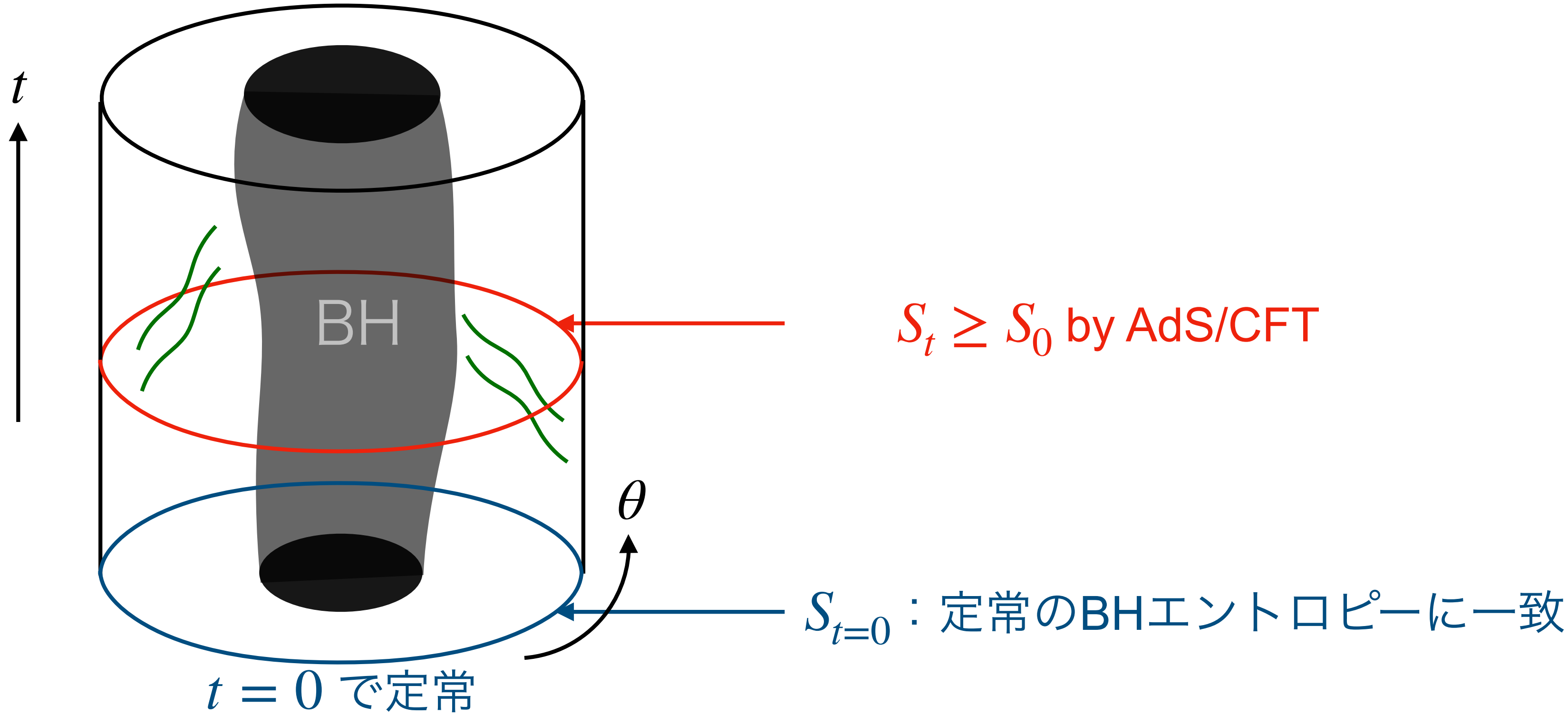
例：ヌルエネルギー条件

何を選んだら良い？

ブラックホール熱力学を定式化する指導原理が欲しい！

AdS/CFTに基づくBH熱力学

$(d+1)$ 次元動的BH + 物質場（古典）



（一般化された）第一法則 $\dot{S}_t = \beta_t(\dot{M}_t - \Omega_t \dot{P}_t) + \text{matter contributions}$

（今回はやらない）

AdS/CFTに基づくブラックホール熱力学

1. 境界理論での粗視化状態の定義と第二法則の導出
2. バルクへの翻訳

AdS/CFTに基づくブラックホール熱力学

1. 境界理論での粗視化状態の定義と第二法則の導出
2. バルクへの翻訳

粗視化＝ある側面だけ尊重

正準分布

$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho$ を最大化

条件：$\mathrm{Tr}(\rho H) = E$ かつ $\mathrm{Tr}\rho = 1$

$\rho_{\mathrm{can}} \propto e^{-\beta H}$ ($\beta = \beta(E)$: Lagrange未定乗数)

$$\boxed{S_{\mathrm{can}} = -\mathrm{Tr}\,\rho_{\mathrm{can}} \ln \rho_{\mathrm{can}}}$$

粗視化状態の導出

$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho \ln \rho$ を最大化

条件：$\mathrm{Tr}(\rho H) = h,\ \mathrm{Tr}(\rho O_I) = o_I,\ \mathrm{Tr}\rho = 1$

$$\boxed{\rho_{\mathrm{cg}} = \frac{1}{Z} \exp\left[-\beta\left(H - \mu^I O_I\right)\right]}$$

$$\tilde{S} = S - \beta\left[\mathrm{Tr}(\rho H) - h - \mu^I \left\{\mathrm{Tr}(\rho O_I) - o_I\right\}\right] + \lambda\left\{\mathrm{Tr}(\rho) - 1\right\}$$

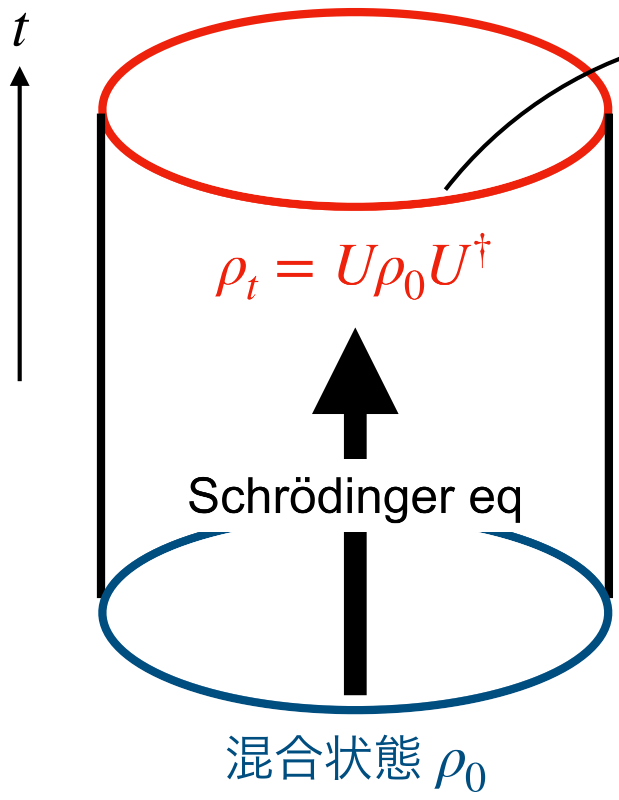
$$\Rightarrow \quad \delta\tilde{S} = \mathrm{Tr}\left[\delta\rho\left\{\underbrace{\ln\rho + 1 + \lambda - \beta\left(H - \mu^I O_I\right)}_{=0}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \rho \propto \exp\left[-\beta\left(H - \mu^I O_I\right)\right]$$

時刻 t での粗視化エントロピー

粗視化の条件:

$$\mathrm{Tr}(\rho H) = h,\ \mathrm{Tr}(\rho P_A) = p_A,\ \mathrm{Tr}(\rho O_I(\theta)) = o_I(\theta)$$



時刻 t での粗視化状態 $\rho_{\mathrm{cg},t}$ は…

$$\boxed{h = \mathrm{Tr}(\rho_t H),\ p_A = \mathrm{Tr}(\rho_t P_A),\ o_I = \mathrm{Tr}(\rho_t O_I(\theta))}$$

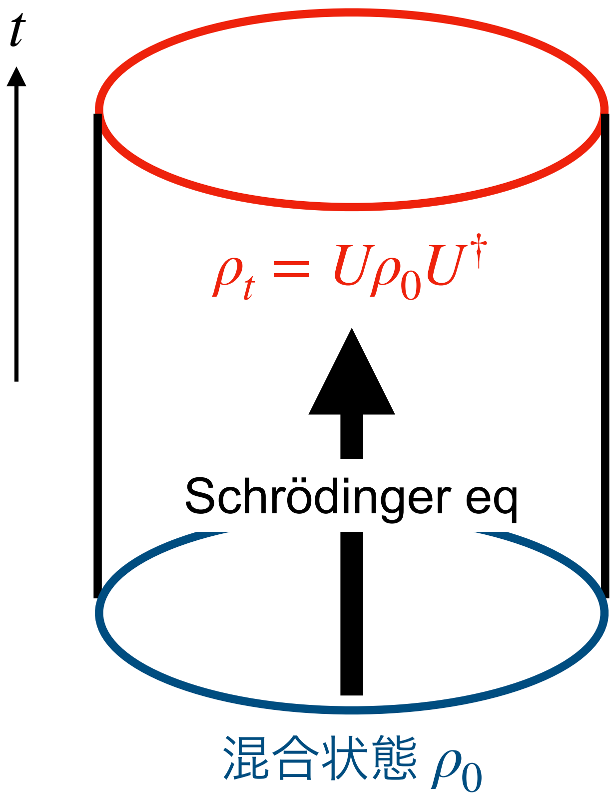
粗視化エントロピー S_t

$$\boxed{S_t := -\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{cg},t} \ln \rho_{\mathrm{cg},t}}$$

相対エントロピーから第2法則

相対エントロピーの正定値性

$$\mathrm{Tr}\,\rho_t\left(\ln\rho_t - \ln\rho_{\mathrm{cg},t}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{第2法則} \quad S_t \geq S_0$$



$$\rho_t$$

$$H(t) = H - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)$$

$$\rho_0 \propto \exp\left[-\beta_0\left(H - \omega_0^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\,\lambda_0^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right]$$

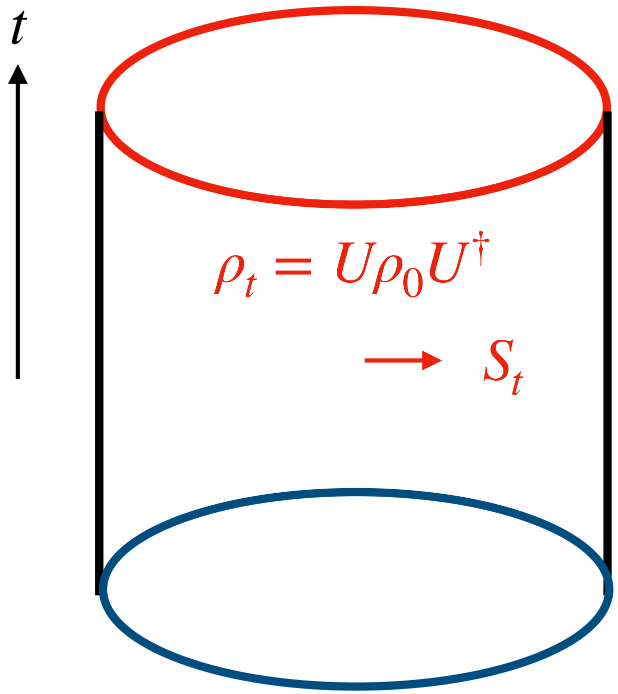
$$\rho_{\mathrm{cg},0} = \rho_0$$

AdS/CFTに基づくブラックホール熱力学

1. 境界理論での粗視化状態の定義と第二法則の導出

2. バルクへの翻訳

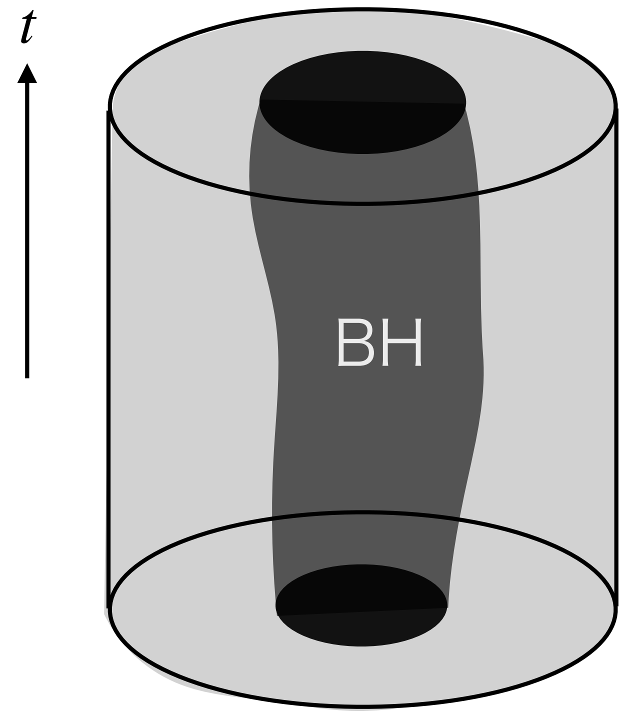
AdS/CFTはBHの力学を拘束する



混合状態 ρ_0

$\longrightarrow\ S_0$

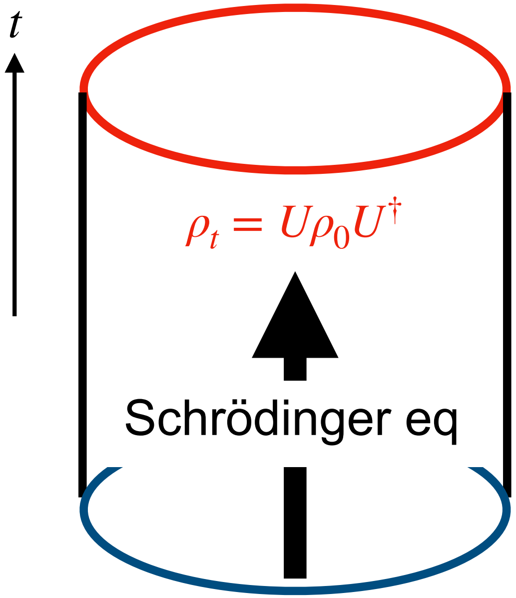
AdS/CFT
$=$



動的BH + 物質

$S_0 \leq S_t$ $\xrightarrow{\text{AdS/CFT}}$ $A_t \geq A_0$

設定：定常から非定常へ発展

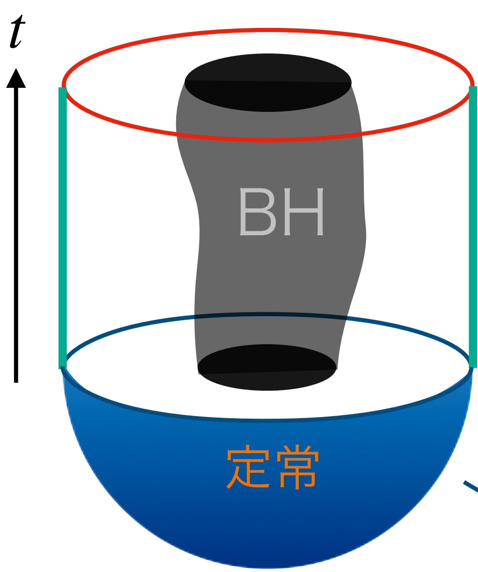


混合状態 ρ_0

ρ_t

$$H(t) = H - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)$$

$$\rho_0 \propto \exp\left[-\beta_0 \left(H - \omega_0^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda_0^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right]$$

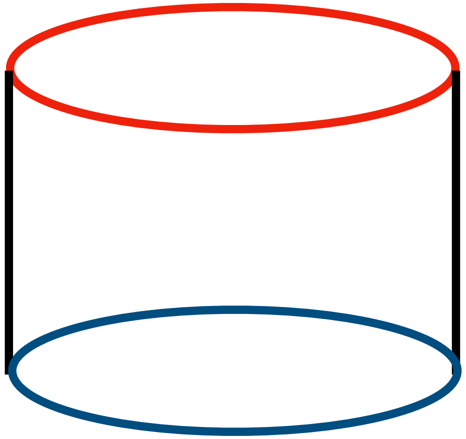


EOM

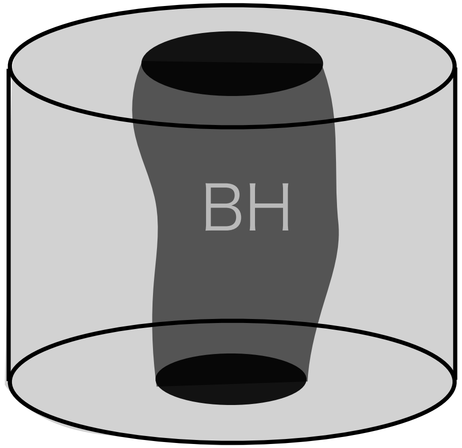
B.C. $\Phi(x) \sim r^{\Delta_I - d} j^I(t,\theta)$

Euclid BHの解析接続で
初期状態を用意

GKPW公式と１点相関



$=$



$$\left\langle e^{i\int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)} \right\rangle \quad = \quad e^{iI_{\mathrm{grav}}[\Phi]} \quad \text{with } \Phi(x) \sim r^{\Delta_I - d} j^I(t,\theta)$$

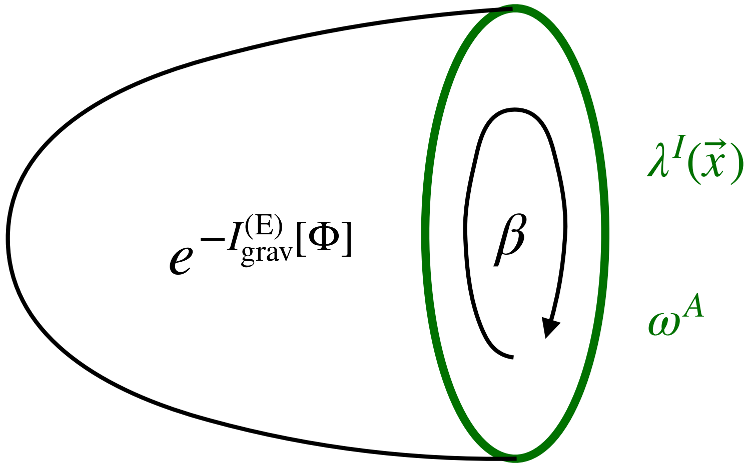
$$\mathrm{Tr}(\rho_t O_I(\theta)) \quad = \quad \frac{\delta}{\delta j^I(t,\theta)} I_{\mathrm{grav}}[\Phi] =: \pi_{I,t}(\theta)$$

$\mathrm{Tr}(\rho_t H),\ \mathrm{Tr}(\rho_t P_A)$ $=$ BHの質量、角運動量

粗視化状態 = Euclid BH

$$Z[\beta, \Omega, \lambda] =$$

$$\mathrm{Tr}\,\exp\left[-\beta\left(H - \omega^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\,\lambda^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right] \overset{\text{AdS/CFT}}{=}$$



$$\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} O_I(\theta)) = -\beta^{-1}\frac{\delta}{\delta\lambda^I(\theta)} I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\Phi] =: \pi^{(\mathrm{E})}_I(\theta)$$

$\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} H)$, $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} P_A)$ $=$ BHの質量, 角運動量

各時刻 t での粗視化状態の決定

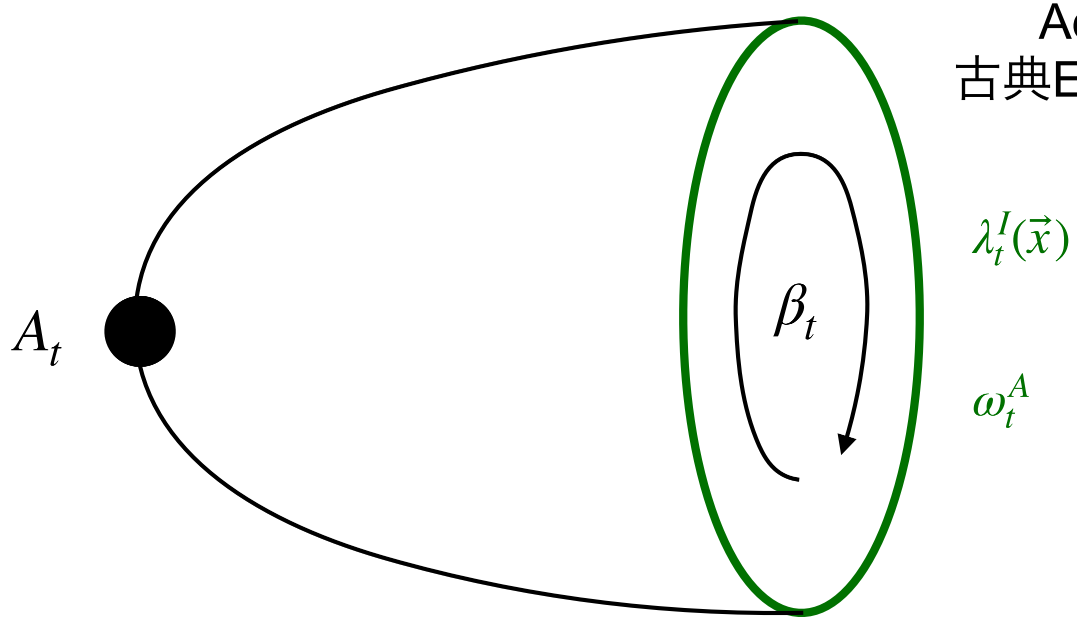
$\boxed{\pi_{I,t}(\theta) = \pi^{(\mathrm{E})}_I(\theta) \text{ および質量と角運動量の一致}}$

解: $(\beta, \omega, \lambda) = (\beta_t, \omega_t, \lambda_t)$

エントロピーは先端の面積

$$
\begin{aligned}
S_t &= -\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{cg},t} \ln \rho_{\mathrm{cg},t} \\
&= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^{-1} \ln Z[\beta, \omega, \lambda])\Big|_{(\beta,\omega,\lambda)\to(\beta_t,\omega_t,\lambda_t)} = \frac{A_t}{4G}
\end{aligned}
$$

AdS/CFT
古典Einstein理論



AdS/CFTより、$A_t \geq A_0$

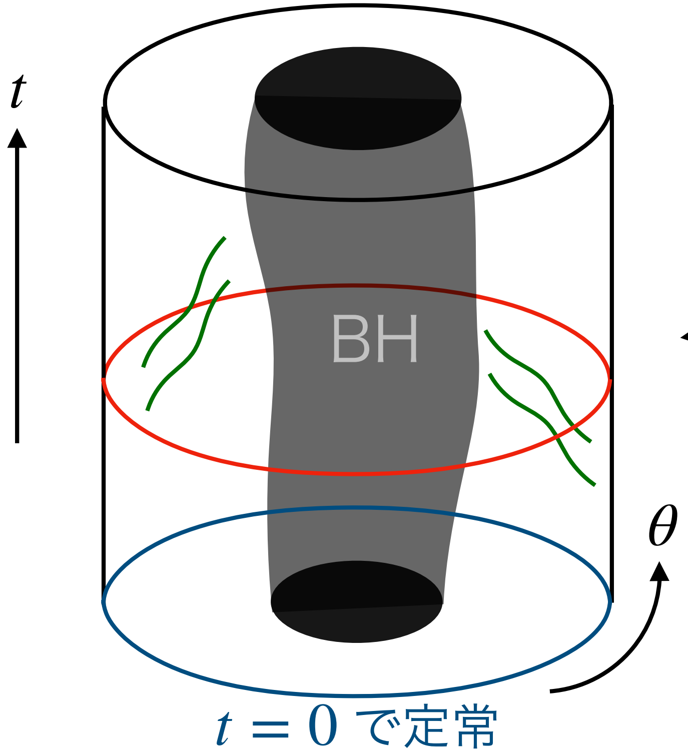
相対エントロピーの正定値性

$\mathrm{Tr}\,\rho_t\left(\ln\rho_t - \ln\rho_{\mathrm{cg},t}\right) \geq 0$ $\Longleftrightarrow$ 第2法則 $S_t \geq S_0$

$$A_t \geq A_0$$

AdS/CFTに基づくBH熱力学

$(d+1)$ 次元動的BH + 物質場（古典）



質量 M_t

(角) 運動量 P_t

規格化可能モード $\pi_{I,t}(\theta)$

同じ値を持つEuclid BHを探す

粗視化エントロピー: $S_t := \dfrac{A_t}{4G}$

第二法則 (AdS/CFT): $S_t \geq S_0$

（第一法則も）