

AdS/CFT 対応におけるバルク時空 再構築の手法の検討

竹田 大地
(素粒子論研究室)

概要

量子重力理論の探究にあたり、AdS/CFT 対応においてバルクの時空が境界の場の量子論から創発する機構を解明することは近年重要な課題となっている。本研究では、バルク時空を構成する既存の2つの手法を組み合わせることでそれらの欠点を克服し、 AdS_3/CFT_2 対応の特殊な場合に対して計量を導出する具体的な手法を提唱する。さらにこの手法をより一般的な理論へと適用する際に生じる困難を明らかにし、その解決に向けた議論を展開する。

目次

1	導入	3
2	準備	5
2.1	AdS/CFT 対応の概要	5
2.2	量子もつれとそのエントロピー	11
2.3	笠-高柳公式	20
3	バルク時空再構築	23
3.1	Hole-ography	23
3.2	光円錐切断の手法	29
4	今回の手法	31
4.1	Hole-ography における光円錐切断	31
4.2	共形因子の決定方法	32
4.3	再構築の手順	33
4.4	具体例への応用	34
4.5	共形因子を決定する別の方法	38
5	まとめと展望	41
6	謝辞	50

1 導入

量子重力理論の探究においては、弦理論が摂動論のレベルで成功を収めてきた。そこでは物質の最小単位である弦の励起状態が重力子として振る舞い、それが重力相互作用を起こす。しかし重力場が物質の運動へ応答する枠組みは古典的には Einstein 方程式として存在するが、弦の運動に対する背景時空の応答やその量子的な性質を非摂動的に記述する体系は確立していない。

重力理論を非摂動的に取り扱う枠組みが探究されていく中で、弦理論を発端に、重力理論と重力を含まない場の量子論の等価性についての予想である AdS/CFT 対応が提唱された [1–3]。重力理論は漸近的反 de Sitter (AdS) 時空上の重力と物質場の理論であり、場の量子論側は AdS 時空の境界 (1 次元低い) に存在する。¹⁾ このように AdS/CFT 対応は図 1 のような描像を持つためホログラフィーとも呼ばれ、重力理論をバルク理論、それと等価な場の量子論を境界理論と呼ぶ。AdS/CFT 対応は現在では弦理論に囚われずに 1 つの分野として研究されていて、特にバルクの古典重力が境界の強結合領域に対応するという性質のため、ゲージ理論の相構造などを古典重力に還元して調べるといった取り組みが多くなされてきた。

しかし、弦理論が未だ成し遂げていない量子重力理論の定式化の問題に立ち返ると、場の量子論側から重力理論を記述するという逆問題は非常に重要な課題と言える。このような逆問題をバルク再構築という。特に場の量子論のどの量に重力側の幾何の情報が埋め込まれているかを調べることで、時空の動力学や創発機構を解明できる可能性がある。

そこで幾何学の基本量である計量を境界の場の量子論から構成する手法が問題となる。特に笠-高柳予想 [4] は境界におけるエンタングルメント・エントロピーとバルク内の曲面の面積を対応づけ、それによってエンタングルメント・エントロピーによるバルクの計量の構成がよく調べられた。他にも相関関数、Wilson ループ、量子計算複雑性などがバルクの計量を導出する際に有効であることが知られている。しかし多くはバルクの時空多様体の存在を認めて計量の形をある程度仮定し、バルクの物理量を不定の計量で与えてそれを等価な境界の値と比較する。そのためバルクでの点や距離といった概念が境界のどの量に対応するかがはっきりせず、時空の創発機構を解明するという立場では不十分といえる。バルクの時空そのものの情報が境界の理論に埋め込まれているはずであると考えると、境界の量を用いて時空多様体を与え (時空創発)、その上に境界の量で計量を定義する (時空の動力学) ことが欠かせない。また、バルクに対称性を要求しない定式化に辿り着くためにもこのことは必要である。

この思想を尊重した手法として、hole-ography²⁾ [5,6] と光円錐切断の手法 [7] が知られている。Hole-ography は元来、3 次元の静的なバルクにおける時間一定面上の曲線やその長さを 2 次元の境界の量に翻訳する手法である。そして閉曲線が 1 点に収縮する極限を上手く利用して、時間一定面上の点とそ

¹⁾ バルクにコンパクト空間があるような場合も考えられていて、その場合は境界ではコンパクト空間は縮んでしまって見えない。つまりバルクに存在したコンパクト空間の分だけさらに次元が低くなる。

²⁾ これはホログラフィー (holography) の駄洒落で、直訳すると“穴学 (hole-ography)”となる。バルクの時間一定面上の閉曲線やその長さを境界から特定する手法であるため、閉曲線を穴と見立てて名付けられた。

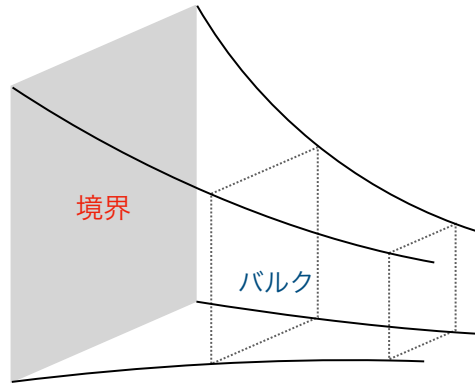


図 1. AdS/CFT 対応の描像. 漸近的 AdS 時空には境界が存在し, その上に場の量子論がある. 境界に対して時空の“中身”をバルクと呼び, そこには重力理論が定義されている.

これらの間の測地線距離も境界のエンタングルメント・エントロピーでホログラフィックに³⁾定義された. しかし時間一定面を取ることから計量の時間成分については記述できない. 一方で光円錐切断の手法は, 境界上の相関関数の特異性 (発散) を利用してバルクの点と時空の因果構造をホログラフィックに定義する. しかしこの手法では因果構造のみが定義されているため, 計量全体に局所的なスケール因子を乗じる不定性が残る.

これらの2つの手法を組み合わせることで互いの欠点を補い, 2次元の境界から3次元のバルク時空を構築する完全な手順を与えることができないであろうか. 具体的には光円錐切断の手法によってスケール因子を除いて計量を求め, そこに時間一定面をとって hole-ography で定まる距離からそのスケール因子を読み取る. 素朴にはこの推論はいつでも上手くいくように思えるが, 2つの手法では時空多様体のホログラフィックな定義が異なるため, それらの間の適切な1対1対応を境界の理論で閉じて与えねばならない. そしてこの関係が自明ではないことが問題となり簡単には行かない. しかし両者が正しいバルクの点の定義を与えているならば, それらの間には必ず関係性があるはずである.

私は [8] において, ある制限されたクラスではその対応関係が明示的であることを見つけ, そのとき上の推論が正しいことを示した. そして2つの手法が抱えていた計算技術上の困難も克服し, pure AdS₃, AdS₃ ソリトン, BTZ ブラックホールの3つの時空を実際に構成することにも成功した. 本論文では [8] の解説を主軸におき, さらにその手法の適用限界や一般化についても議論する.

³⁾ ホログラフィーで一方の理論の興味のある対象を, 双対なもう一方で解釈する際にこのように表現する.

2 準備

2.1 AdS/CFT 対応の概要

AdS/CFT 対応について簡単に復習する。まずは概要を述べ、次に AdS 時空と共形場理論について必要事項を簡潔に整理し、その後 4.4 節で扱う 3 つの具体例について双対な理論がどのようなものであるか解説する。

- 基本理念

AdS/CFT 対応とは、漸近 AdS 時空上のある重力理論が、その共形境界上のある場の量子論に等価であるという双対性のことである。ここで等価であるとは、理論のパラメータや演算子が 2 つの間である対応関係を持ち、分配関数が等しいということである：

$$Z_{\text{gravity}} = Z_{\text{QFT}}. \quad (2.1)$$

重力側の次元が $d+1$ (+ コンパクト空間) であるならば、場の量子論の次元は境界の次元である d となる。どのような重力理論と場の量子論が対応しているのかを一般的に分類することはできていないし、どの程度大きいクラスで双対性が存在するのもまだ不明である。近年は私の研究も含め、双対性を仮定した場合に一般にどのような対応関係が成り立っているのかを調べる研究が多く、これらの研究は将来的に双対性の証明や特定に必要な条件として役立つだろう。

AdS/CFT 対応は Maldacena によって [1] で初めて提唱された。まずはこれを概観したい。Maldacena はタイプ IIB 超弦理論において存在できる、 N 枚の D3 ブレーンに着目した。D ブレーンは開弦が端点をつけることのできる弦理論における物体であり、閉弦である重力子と相互作用ができるため質量を持つ (特に D3 ブレーンは 1+3 次元の場合を指す)。ここで D3 ブレーン近傍に着目し、閉弦が D3 ブレーンとへ入り、相互作用してから放出される描像を考える。すると図 2 のような 2 つの低エネルギー理論が考えられる。

1 つ目はゲージ場の理論による記述である。D3 ブレーンに閉弦が入った後は D3 ブレーン上で開弦の散乱が起こり、その後再び閉弦として放出される。D3 ブレーン近傍の低エネルギー有効理論を考えているので、開弦は無質量のモードであるとみなせる。そして D3 ブレーン作用の低エネルギーでの展開によって、その理論が $\mathcal{N} = 4$ の超対称性を持つ $SU(N)$ ゲージ理論になることが知られている。この理論は共形場理論 (CFT) である。

2 つ目は重力理論による記述である。Einstein 重力においても知られているように、物質の存在は時空の幾何学に還元される。タイプ IIB 超弦理論の低エネルギー理論であるタイプ IIB 超重力理論の古典解には、D3 ブレーンに対応するブラック 3 ブレーン解が存在し、D3 ブレーンが幾何として解釈される。ここでブラック D3 ブレーン解とは特異点が空間的広がりを持つような一般化されたブラックホー

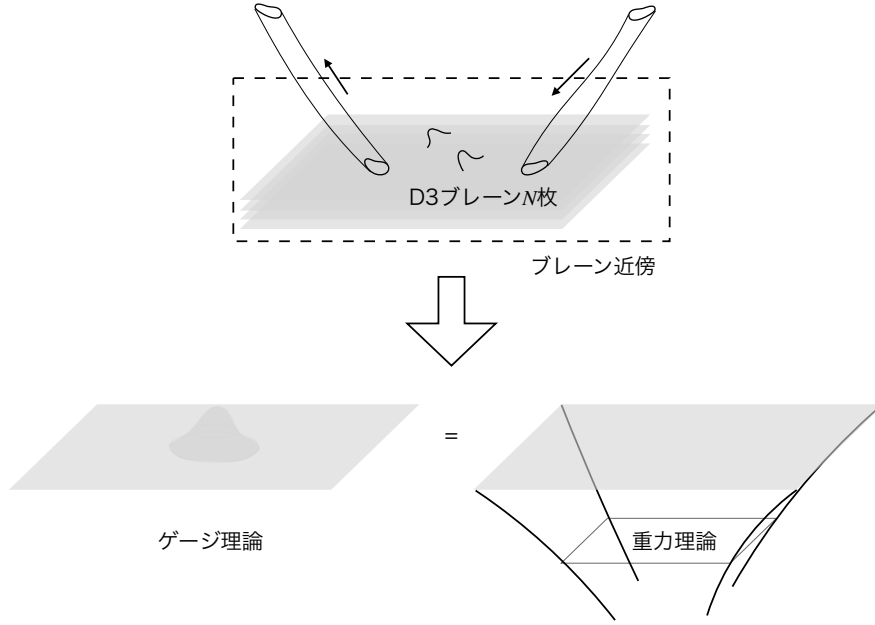


図 2. 閉弦と D3 ブレーンの相互作用の 2 つの低エネルギー描像

ルのことで、次の計量で表される：

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (2.2)$$

ただし L は定数で、 $\eta_{\mu\nu}$ は 4 次元 Minkowski 計量である．元々は D3 ブレーンの近傍を見ていたため、 $r/L \ll 1$ の漸近形を取ると、

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2 \quad (2.3)$$

を得る．これは (Poincaré patch での) AdS 半径 L の $\text{AdS}_5 \times S^5$ 時空である．

以上より、閉弦が D3 ブレーン N 枚に入ってから出ていくまでの過程を記述するには 2 つの低エネルギー有効理論があり得ることがわかった．元々は超弦理論から出発しているので、2 つの理論のパラメータは弦の長さ ℓ_s 、弦の結合定数 g_s 、D3 ブレーンの枚数 N で表せる．結果だけ述べると、ゲージ理論ではゲージ群の次元が N 、't Hooft 結合定数が $\lambda = 2\pi g_s N$ であり、重力理論では AdS 半径が $L = (4\pi N g_s)^{1/4} \ell_s$ 、結合定数が $\kappa = 8\pi^{7/2} \ell_s^4 g_s$ となる．超重力理論での解が信頼できるのは、量子補正と弦の有質量励起が無視できるときである．前者はプランク長 $\kappa^{1/4}$ が AdS 半径より十分小さいという条件で、 $N \gg 1$ ．一方で後者は弦の長さが AdS 半径より十分小さいという条件で、 $\lambda \gg 1$ ．つまり、ゲージ理論側では強結合で N が大きいときを考えることになる．

2 つの理論は同じ理論の低エネルギー有効理論であるため、弦理論が無矛盾であるなら等価である．すなわち、 $N = 4$ の超対称性を持つ $\text{SU}(N)$ ゲージ理論 ($N, \lambda \gg 1$) と $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上のタイプ IIB 超重力

理論が等価であるということになる.. また2つの理論は、図2の描像であったため、ゲージ理論は重力理論の境界 ($r \rightarrow \infty$) に位置しているという見方が可能となる. 2つの間での相関関数の等価性は [2,3] において調べられ, GKP-Witten 関係式と呼ばれている が, バルクと境界の対応として理解されている. このバルクと境界の対応の描像はホログラフィーと呼ばれる.

Maldacena の予想はより強く, ゲージ理論で結合定数の制約がなく, 重力理論がタイプIB 超弦理論である場合でも等価であるとも予想もされている. この双対性を発端にさまざまな双対な組が予想され, ホログラフィーの分野は進展してきた.

• AdS 時空

AdS 時空は Einstein 方程式の解で, 負の定曲率を持つために宇宙定数が負となる. その $d+1$ 次元の AdS 時空は AdS_{d+1} と表記されるが, それは1次元高い平坦時空 $\mathbb{R}^{2,d}$ の超曲面として定義することができる. ここではその方法で定義を与えることにする. まずは (T^1, T^2, \mathbf{X}) に対して $\mathbb{R}^{2,d}$ での計量は

$$ds^2 = -(dT^1)^2 - (dT^2)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^d)^2 = -(dT^1)^2 - (dT^2)^2 + d\mathbf{X}^2 \quad (2.4)$$

で与えられる. ここで定数 L で特徴付く超曲面

$$-(T^1)^2 - (T^2)^2 + \mathbf{X}^2 = -L^2 \quad (2.5)$$

を考え, これを

$$T^1 = \sqrt{r^2 + L^2} \cos \frac{t}{L}, \quad T^2 = \sqrt{r^2 + L^2} \sin \frac{t}{L}, \quad \mathbf{X} = r\Omega_{d-1} \quad (2.6)$$

とパラメータ表示しよう. ただし Ω_{d-1} は $d-1$ 次元単位球面上の点を表す. 超曲面の計量は

$$ds_{\text{global}}^2 = -\frac{r^2 + L^2}{L^2} dt^2 + \frac{L^2}{r^2 + L^2} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.7)$$

となる. これが AdS_{d+1} である. ただし t 方向は元々周長 $2\pi L$ の S^1 であったが, AdS_{d+1} ではその普遍被覆 \mathbb{R} を取ることにする. これによって時間的閉曲線ができない.

今定義した AdS_{d+1} の表式は (2.3) から S^5 を取り除いた表式と異なる. 実は (2.7) は global patch と呼ばれ, (2.3) を最大拡張したものに当たる. 超曲面の式 (2.5) において, 代わりに

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (\mathbf{x}^2 - t^2 + L^2) \right], & T^2 &= \frac{rt}{L}, \\ X^{1, \dots, d-1} &= \frac{Lx^{1, \dots, d-1}}{L}, & X^d &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (\mathbf{x}^2 - t^2 - L^2) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

とおけば,

$$ds_{\text{Poincaré}}^2 = -\frac{r^2}{L^2} dt^2 + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} d\mathbf{x}^2 \quad (2.9)$$

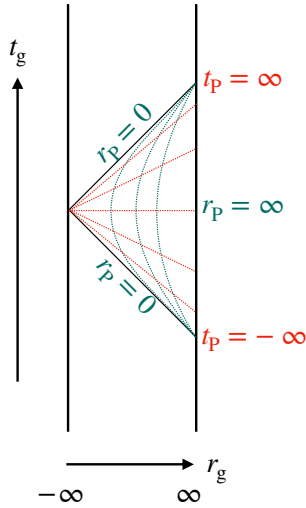


図 3. AdS₂ の Penrose 図. 文中では同一の文字であるため global か Poincaré かを添字 g, P で区別している.

となり, (2.3) と合っている. こちらは Poincaré patch と呼ばれる. 2つの patch の関係については $d = 2$ に関して図 3 に描かれている.

次に共形境界について述べる. 漸近 AdS 時空の共形境界は, $r \rightarrow \infty$ に存在する. 計量 (2.7) において $r \rightarrow \infty$ での振る舞いは

$$ds_{\text{global}}^2 = -\frac{r^2 + L^2}{L^2} \left[dt^2 + \left(\frac{L^2}{r^2 + L^2} \right)^2 dr^2 + L^2 d\Omega_{d-1}^2 \right] \quad (2.10)$$

となる. ここで [] の前に付いている共形因子を取り除き, [] 中で $dr \equiv 0$ とすると

$$ds_{\text{boundary}}^2 = dt^2 + L^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.11)$$

を得るが, これが境界の計量と定義される. Poincaré patch でも $r \rightarrow \infty$ を考え, r^2/L^2 を引き抜いたものが境界の計量となる.

最後に対称性について述べる. 平坦時空 $\mathbb{R}^{2,d}$ には $SO(2, d)$ 対称性があり, 超曲面 (2.5) はその対称性を尊重している. 従って AdS _{$d+1$} は $SO(2, d)$ という対称性を持っている.

● 共形場理論 (CFT)

共形場理論とは, 共形対称性 (共形変換による不変性) を持った理論である. その共形変換とは座標変換 $x \rightarrow x'(x)$ のうち, その変換の下で計量が

$$g \rightarrow g' = e^\omega g \quad (2.12)$$

のように変換するものである。ここで $\omega(x)$ はあるスカラーである。この計量で定まる内積 $(,)$ によって、任意のベクトル a, b のなす角度 θ を

$$\cos \theta = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)(b, b)}} \quad (2.13)$$

で定めると、共形変換はこの角度を不変に保つような座標変換であると分かる。

共形変換の生成子を (2.12) において g を d 次元 Minkowski 計量に選んだ場合に考えると、

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu, & L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \\ D &= -ix^\mu\partial_\mu, & K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^\nu x_\nu\partial_\mu) \end{aligned} \quad (2.14)$$

の 4 種類が得られる。上から順に、並進変換, Lorentz 変換, スケール変換, 特殊共形変換の生成子である。前の 2 つは Poincaré 変換であり、後ろの 2 つは共形変換で新たに加わったものである。特にスケール変換に対して理論が不変であることは理論に典型的なスケールがないことを意味し、従って共形場理論はくりこみ群の固定点上の理論となる。

上の 4 種類の生成子を

$$\begin{aligned} J_{-1,0} &= D, & J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\ J_{0\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), & J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

のように反対称のテンソル J_{ab} ($a, b = -1, \dots, d$) の形でまとめると、

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bd}J_{ac}) \quad (2.16)$$

となる。ただし $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, \dots, 1)$ と定義した。この代数は $\text{SO}(2, d)$ 代数である。

以下では Euclid 化した $d = 2$ の場合について詳しく見ていこう。このとき座標は複素座標 (z, \bar{z}) を用いると便利であり、共形変換は正則変換 $z \rightarrow w = f(z)$ と反正則変換 $\bar{z} \rightarrow \bar{w} = \bar{f}(\bar{z})$ を独立に行うという広いクラスのものに格上げされる。2次元では上の 4 種の変換は特に区別して大域的共形変換と呼ばれる。共形変換に対して複合演算子⁴⁾ $O(z, \bar{z})$ が

$$O(z, \bar{z}) \rightarrow O(w, \bar{w}) = [f'(z)]^{-h} [\bar{f}'(\bar{z})]^{-\bar{h}} O(z, \bar{z}) \quad (2.17)$$

のように変換する場合、 O をプライマリー演算子と呼び、 (h, \bar{h}) を共形ウェイトという。全ての共形変換ではないが、大域的共形変換に対してのみ (2.17) と振る舞う場合は準プライマリー演算子という。⁵⁾

準プライマリー演算子の間の相関関数は、変換性から関数系が強く制限される。例えば 2 点相関は、演算子の組み合わせに依存する定数 C_{12} (座標に依存しない) を除いて

$$\langle O_1(z_1, \bar{z}_1) O_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12} \delta_{h_1 h_2} \delta_{\bar{h}_1 \bar{h}_2}}{(z_1 - z_2)^{2h_1} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}_1}} \quad (2.18)$$

⁴⁾ 複数の場から構成される局所演算子のこと。エネルギー運動量テンソルなど。

⁵⁾ プライマリーなら準プライマリーである。

のように関数形が完全に定まる．エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は一般に準プライマリー演算子で、 (z, z) 成分は正則関数であることが知られており、そのウェイトは $(2, 0)$ である．そこで $T(z) = -2\pi T_{zz}$ とおくと、(2.18) によってある定数 c が存在し、

$$\langle T(z_1)T(z_2) \rangle = \frac{c/2}{(z_1 - z_2)^4} \quad (2.19)$$

となる．この c を中心電荷と呼ぶ．反正則成分についても同様で、中心電荷は同じ値になる。⁶⁾

● AdS と CFT の双対性

Maldacena の予想で対称性の対応を見よう．ゲージ理論は CFT_4 の対称性 $\text{SO}(2, 4)$ と超対称性の R 対称性 $\text{SO}(6)$ を持つ．一方で重力理論では AdS_5 時空の対称性 $\text{SO}(2, 4)$ と S^5 の $\text{SO}(6)$ 対称性を持つ．従って対称性の対応から、ゲージ理論側で超対称性を除けば、対応する重力理論ではコンパクト空間 S^5 が取り除かれると考えられるのである．そこで一般に $\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$ が成り立つとされている．他にも演算子の対応、スペクトルの対応などが知られており、双対性の根拠となっている．また有名なパラメータの対応 [9]

$$c = \frac{3L}{2G} \quad (2.20)$$

は後に用いる．この関係式において c は CFT の中心電荷で、 L は AdS 半径、 G はニュートン定数である．

● AdS ブラックホールと有限温度 CFT の双対性

AdS_{d+1} ブラックホール時空とは次の計量で表される漸近 AdS_{d+1} 時空で、Einstein 方程式の解である：

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{d-1}^2, \quad h(r) = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2}. \quad (2.21)$$

ここで μ は正のパラメータである．ブラックホールが熱力学系であること、そして AdS ブラックホールが AdS 時空におかれたブラックホールであることを考慮して、これに対応する境界の理論は CFT を同じ温度の熱力学系にしたものである考えられている．特にバルクは実時間であるので、境界の理論として実時間形式の有限温度 CFT⁷⁾ を想定する．

⁶⁾ これは Weyl アノマリーの計算によって示せる．

⁷⁾ スケールを持っているのではや CFT ではないが、有限温度系へ変形した CFT という意味でこう呼ばれる．

- AdS ソリトンと閉じ込め相 CFT の双対性

上では事象の地平面が球面であるようなブラックホールを考えたが、それが平面であるようなブラックホールも存在する：

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-h(r)dt^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^{d-1})^2) + \frac{L^2}{r^2 h(r)} dr^2, \quad h(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^d. \quad (2.22)$$

これも Einstein 方程式の解である．ここで $t \rightarrow -ix^1$, $x^1 \rightarrow -it$ のように二重 Wick 回転を行うと，

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + h(r)(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{d-1})^2) + \frac{L^2}{r^2 h(r)} dr^2 \quad (2.23)$$

という計量を得る．これもやはり Einstein 方程式の解で， AdS_{d+1} ソリトン時空と呼ばれる．AdS ソリトン時空はブラックホールではない．というのも $r < r_0$ ではもはや Lorentz 形式の符号にならないからである．従って時空が $r = r_0$ で終わっている．

Wilson ループはクォーク・反クォーク対のポテンシャルを測るが，そのポテンシャルはホログラフィックには，1本の弦の端点を境界の2点に固定してバルクに垂らした時の弦の張力によるエネルギーに対応すると知られている．この長さは境界の2点の間隔 ℓ を上げるとバルクの中心へと深く垂れ，AdS ソリトンでは $r = r_0$ で時空の“底”が来るため，垂らした弦がその底を這い始める．そのため ℓ が十分大きければ弦の長さは ℓ に比例し，弦の張力によるエネルギーも ℓ に比例する．よってクォーク・反クォーク対のポテンシャルは ℓ に比例するが，これは閉じ込め相での振る舞いである．従って，AdS ソリトンの境界には CFT に閉じ込めスケールを持たせる変形を行った理論が想定されている．

2.2 量子もつれとそのエントロピー

量子系特有の物理量であるエンタングルメント・エントロピーについて解説する．4節でのバルク再構築の手法では，境界の物理量としてエンタングルメント・エントロピーを用いる．

- 量子もつれ

まずは量子多体系の状態 $|\psi\rangle$ に対して量子もつれ (量子エンタングルメント) を考えたい．今，多体系を系 A と系 B へ図4のように分割したとしよう．状態が

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (2.24)$$

のようにそれぞれの Hilbert 空間の元の直積でかけるとき， A と B は量子的にもつれていないという．逆にこのような直積で表せないとき， A と B は量子的にもつれているという．以下では直積の表式に関しては左側が A で右側が B とし，混乱がない場合は \otimes を省略する．

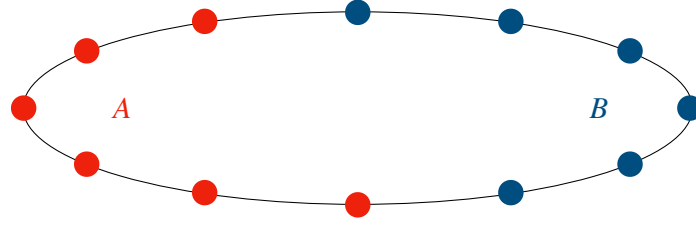


図 4. A 系と B 系への分割

例として 2 スピン系を考え，一方を A ，他方を B とする．1 つのスピンは $|0\rangle, |1\rangle$ の 2 状態を取り，これらは A, B それぞれの Hilbert 空間で正規直交基底となっている．このとき例えば，

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|1\rangle|1\rangle \quad (0 < p < 1) \quad (2.25)$$

はもつれているが，

$$|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle \quad (2.26)$$

はもつれていない．

次に混合状態の量子もつれについて考えたい．混合状態とは熱力学系のように，系の状態はわかっていないが，系の物理量の期待値が古典的な統計で与えられるような状態である．混合状態は

$$\text{Tr}\rho = 1, \quad \rho^\dagger = \rho, \quad \rho: \text{半正定値} \quad (2.27)$$

を満たす密度行列と呼ばれる演算子 ρ を用いて定義され，観測可能量 O の期待値は

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O) \quad (2.28)$$

で与えられる．

密度行列はエルミート性から対角化でき，その対角成分には 0 以上の実数が並び，その和が 1 である．すなわち ρ は適当な正規直交基底 $|i\rangle$ によって

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad \left(p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1 \right) \quad (2.29)$$

と表される．状態 $|i\rangle$ への射影演算子の期待値は

$$\text{Tr}(\rho |i\rangle\langle i|) = p_i \quad (2.30)$$

で与えられるため， p_i は系が状態 $|i\rangle$ をとる確率となっている．そして一般の期待値は

$$\langle O \rangle = \sum_i p_i \langle i|O|i\rangle \quad (2.31)$$

であるため、確かに古典統計の期待値を表している。

例えばカノニカル分布に対しては密度行列が

$$\rho_{\text{can.}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} = \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} |i\rangle \langle i| \quad (Z := \text{Tr} e^{-\beta H}) \quad (2.32)$$

である。ここで $|i\rangle$ はハミルトニアン H の固有値 E_i の固有状態で、縮退も区別している。

混合状態と対比して、上で扱った通常の量子力学の状態を純粋状態という。規格化された純粋状態 $|\psi\rangle$ に対しても密度行列を

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.33)$$

と定義すれば、(2.27) と (2.28) は満たされることがすぐに分かる。ただしこのような平行な議論が可能でもなお、純粋状態は混合状態と区別すべきである。それは純粋状態が重ね合わせや干渉を起こすのに対して、混合状態は本質的に量子多体系の古典統計を扱っているからである。式 (2.29) が重ね合わせではなく状態の古典平均に過ぎないことは (2.30) や (2.31) によって示されている。与えられた密度行列が純粋状態を表すか真に混合状態を表すかの判定は、その固有値を見れば良い。もし 1 が 1 つでそれ以外が 0 ならば実は純粋状態であったと判断できる。またこれは $\text{Tr} \rho^2 = 1$ であることと必要十分でもある。⁸⁾

さて混合状態が定義できたところで、系を A と B に分けてその量子もつれを定義したい。混合状態がセパラブルであるとは、

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad \left(\sum_i p_i = 1, \quad p_i > 0 \right) \quad (2.34)$$

のように、 A と B における何らかの密度行列の直積の古典平均で表されることである。混合状態がセパラブルでない場合に、量的にもつれているという。なおセパラブルの表式 (2.34) は $\rho_{A,B}^i$ が密度行列であるので、

$$\text{Tr} \rho = \sum_i p_i (\text{Tr}_A \rho_A^i) (\text{Tr}_B \rho_B^i) = \sum_i p_i = 1 \quad (2.35)$$

のように (2.27) をきちんと満たしている。

例えば 2 スピン系が

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |0\rangle) (\langle 0| \otimes \langle 0|) + \frac{1}{2} (|1\rangle \otimes |1\rangle) (\langle 1| \otimes \langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0|) \otimes (|0\rangle \langle 0|) + \frac{1}{2} (|1\rangle \langle 1|) \otimes (|1\rangle \langle 1|) \end{aligned} \quad (2.36)$$

のような混合状態にある場合、これは $p_0 = p_1 = 1/2$ の下でセパラブルである。なおこの ρ は (2.27) を満たすため、密度行列の資格を持っていることに注意されたい。

⁸⁾ $\text{Tr} \rho^2$ は純粋さと呼ばれ、 ρ を対角化すればわかるように純粋状態で 1、混合状態で 1 より小さい値を取る。

• エンタングルメント・エントロピー

系の密度行列 ρ に対して,

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho \quad (2.37)$$

を A へ簡約化された密度行列 ρ_A という. ρ_A も密度行列になっていることは, ρ が密度行列であることから従う. 密度行列ということは, B のことを知らない観測者にとって A 系は混合状態 ρ_A で記述されることになる. ただし ρ が, A と B がもつれていない純粋状態の密度行列ならば, ρ_A は再び純粋状態の密度行列になる. 純粋状態, 混合状態に関わらず, 部分系 A のエンタングルメント・エントロピーは ρ_A を用いて,

$$S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \ln \rho_A) \quad (2.38)$$

で定義される. ここで S_A は ρ_A の Shannon エントロピーであり, 情報理論において系の平均情報量を表す.⁹⁾ 情報量とはその事象を表現するのに必要なビット数と解釈でき, 確率 p_i で起こる事象の情報量は $-\ln p_i$ で定義され, 系のもつ平均情報量 $-\sum_i p_i \ln p_i$ がエントロピーである.¹⁰⁾ (ρ_A も対角化すればこの形になる.) この意味で S_A は A のみを測定できる観測者が知り得る A の情報量と解釈できる.

純粋状態に対してエンタングルメント・エントロピーが量子もつれを測れていることを見ていきたい. 例として, 純粋状態 (2.26) に対しては

$$\rho_A = |0\rangle\langle 0| \quad (2.39)$$

であるため,

$$S_A = -(\ln 1)\text{Tr}_A |0\rangle\langle 0| = 0 \quad (2.40)$$

となり, 量子もつれがないことに対応している. 次に純粋状態 (2.25) に対しては

$$\rho_A = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1| \quad (2.41)$$

であるため,

$$S_A = -\text{Tr}_A(p \ln p |0\rangle\langle 0| + (1-p) \ln(1-p) |1\rangle\langle 1|) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \quad (2.42)$$

となり, 0 でない値を返している ($0 < p < 1$ としていた). これは $p = 1/2$ で最大値をとるが, このとき (2.25) は Bell 状態と呼ばれる. 一方で $p \rightarrow 0, 1$ の極限では $S_A \rightarrow 0$ になる.

⁹⁾ 物理では解析の面で自然対数を採用するが, 情報理論では対数の底を 2 にとる.

¹⁰⁾ ある事柄を 0 と 1 からなる文字列へ符号化する際に必要な文字数が多いほど, その事柄が持つ情報も多いとみなすのは自然である. 確率が $1/8$ である事象は, 0 か 1 を無作為に 3 連続で表示させて 111 になるというモデルに置き換えられ, 従ってこの事象を符号化するのに 3 ビット必要になる. 対数の底を 2 に取れば $-\log_2(1/8) = 3$ であり, 情報量は必要なビット数である.

Bell 状態では A の 2 状態が等確率で出現し、式 (2.25) において p を $1/2$ から $0, 1$ に近づけていくと、次第にもつれのない状態 $|0\rangle|0\rangle$ ($|1\rangle|1\rangle$) に近づいていく。一方で (2.42) において p を $1/2$ から 1 (0) に近づけていくと、 S_A は減少して 0 に近づく。従って S_A を小さくしていくことと量子もつれが切っていくことが対応することになり、エンタングルメント・エントロピーは純粋状態に対して量子もつれを測れているといえる。逆に言えば、量子もつれとは A のみを測定できる観測者の知り得る A の情報量が 0 ではないことを指す言葉であり、エンタングルメント・エントロピーはその平均情報量のことである。さらに純粋状態に対しては

$$S_A = S_B \quad (2.43)$$

が成り立つため、エンタングルメント・エントロピーとは B を知らない観測者が持っている B の情報量であるともいえるのである。¹¹⁾ 証明には Schmidt 分解を用いる。Schmidt 分解とは、純粋状態 $|\psi\rangle$ が

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle |f_i\rangle \quad (c_i > 0) \quad (2.44)$$

のように表せるというものである。ここで $|e_i\rangle$ は A においてのある直交基底、 $|f_i\rangle$ は B のそれである。この表式を用いて、

$$\rho_A = \sum_{i,j} c_i^* c_j |e_i\rangle \langle e_j| \text{Tr}_B |f_i\rangle \langle f_j| = \sum_i |c_i|^2 |e_i\rangle \langle e_i|, \quad (2.45)$$

すなわち

$$S_A = - \sum_i |c_i|^2 \ln |c_i|^2 \quad (2.46)$$

を得る。上の計算は (2.44) が A と B の入れ替えに関して対称であるので、全く同じ計算結果を与える。

これまでは純粋状態に対して、エンタングルメント・エントロピーと量子もつれの関係を詳しく見てきた。しかし、エンタングルメント・エントロピーは混合状態に対しては量子もつれの定量化にはなっていない。それを見るためにセパラブルである (2.36) に対して S_A を計算してみよう。 A へ簡約化された密度行列は

$$\rho_A = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| \quad (2.47)$$

であるから

$$S_A = \ln 2 \quad (2.48)$$

を得る。このようにセパラブルであるのに S_A が消えない例があるため、量子もつれを測れていない。

¹¹⁾ これがよく言われるエンタングルメント・エントロピーの解釈であるが、情報理論に立ち返るとこの段階で初めて言えることである。また混合状態に対しては一般に等号が成り立たないので、この解釈は無効である。

それでも混合状態に対してエンタングルメント・エントロピーを考える意義がある。1つの例として、熱力学的エントロピー S_{th} との比較がある。再びカノニカル分布 (2.32) において、 A 系を全系とすると $\rho_A = \rho$ であり、このとき

$$S_A = -\text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} (-\beta H - \ln Z) \right] = \beta \langle H \rangle + \beta^{-1} \ln Z = S_{\text{th}} \quad (2.49)$$

が成り立っている。ただし $-\beta^{-1} \ln Z$ はカノニカル分布において自由エネルギーであった。また 2.3 節の笠-高柳公式など、ホログラフィーにおいてエンタングルメント・エントロピーはバルクの幾何学と密接に関わるため、境界が混合状態である場合のバルクを調べる際には役に立つ。

純粋状態、混合状態に関わらないエンタングルメント・エントロピーの重要事項を見ておこう。まずは最大エンタングルメントについて述べる。1つの理論において、式 (2.38) を最大にするような状態は何であろうか。系の Hilbert 空間の次元が有限で N である場合を考えるものとし、 ρ_A を適当な基底で行列表示した結果を M とする。Lagrange の未定乗数を λ として

$$f(M) = -\text{Tr}(M \ln M) - \lambda(\text{Tr} M - 1) \quad (2.50)$$

の変分問題を考えれば良い。変分を考えると

$$f(M + \delta M) - f(M) = -\delta M_{ji} [(\ln M)_{ij} + (1 + \lambda)\delta_{ij}] \quad (2.51)$$

であるので、これが消えるような M は

$$M = e^{-1-\lambda} \mathbf{1} \quad (2.52)$$

と単位行列に比例する。従って ρ_A が単位演算子に比例するとき、つまり任意に基底をとって

$$\rho_A = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} |i\rangle \langle i| \quad (2.53)$$

と書けるときに S_A は停留する。ただし未定乗数も $\text{Tr} M = 1$ から決定しておいた。ここでは最大値であることの確認は省略する。一般に ρ_A が単位演算子に比例する場合に最大エンタングルメントといい、その状態は最大にもつれているという。上で紹介した Bell 状態は最大にもつれた状態である。

また証明はしないが、エンタングルメント・エントロピーは強劣加法性を満たす。強劣加法性とは、任意の部分系 A, B, C に対して

$$S_{AUC} + S_{CUB} \geq S_C + S_{AUBUC} \quad (2.54)$$

が成り立つというものである。特に C は空集合である場合については、劣加法性

$$S_A + S_B \geq S_{AUB} \quad (2.55)$$

が成り立つことになる。

• 場の理論におけるエンタングルメント・エントロピー

これまで量子多体系に対するエンタングルメント・エントロピーを考えてきた。場の理論においてもエンタングルメント・エントロピーは全く同様に (2.38) で定義される。ここで場の理論において部分系とは何か注意しておきたい。場の理論でも量子力学同様に Schrödinger 描像を考えることができる。場を象徴的に $\phi(t, \mathbf{x})$ と書き、空間方向 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ を格子間隔 a で離散化すると

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int dt \int d^d \mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_i \phi(t, \mathbf{x})) \\ &\rightarrow \int dt a^d \sum_{\mathbf{n}} \mathcal{L} \left(\phi(t, \mathbf{x}_{\mathbf{n}}), \phi \left(t, \frac{\mathbf{x}_{\mathbf{n}+a\mathbf{e}_i} - \mathbf{x}_{\mathbf{n}}}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

のようになり、格子点に粒子が配置された他粒子系に帰着する。ここで \mathbf{e}_i は i 方向の単位ベクトルである。従って部分系を時間一定面における \mathbb{R}^d 中の領域にとるのが自然な拡張である。¹²⁾

以下では Euclid 形式を扱うことにする。まず場の理論の基礎を確認しておこう。通常、正規直交基底として場 $\phi_{\mathbf{x}} := \phi(0, \mathbf{x})$ の固有状態

$$|\phi\rangle = \bigotimes_{\mathbf{x}} |\phi_{\mathbf{x}}\rangle \quad (2.57)$$

が取れると仮定する。完全性の条件は

$$1 = \int_{t=0} \mathcal{D}\phi |\phi\rangle \langle\phi| \quad (2.58)$$

であり、規格化因子は測度に入っているものとする。これを用いて純粋状態 $|\psi\rangle$ のノルムは

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{t=0} \mathcal{D}\phi |\psi(\phi)|^2 =: Z_{\psi}, \quad \psi(\phi) = \langle\phi|\psi\rangle. \quad (2.59)$$

と計算される。状態 $|\psi\rangle$ が Schrödinger 方程式に従って $|\psi_0\rangle$ から時間 T かけて発展してきたと考えると、

$$|\psi\rangle = e^{-HT} |\psi_0\rangle = \int_{-T \leq t \leq 0} \mathcal{D}\phi e^{-S} \psi_0(\phi(-T)) |\phi(0)\rangle, \quad (2.60)$$

$$\langle\psi| = \int_{-T \leq t \leq 0} \mathcal{D}\phi e^{-S^*} \psi_0^*(\phi(-T)) \langle\phi(0)| = \int_{0 \leq t \leq T} \mathcal{D}\phi e^{-S} \psi_0^*(\phi(T)) \langle\phi(0)|, \quad (2.61)$$

である。¹³⁾ ここで $\phi(t)$ は写像 $x \mapsto \phi(t, x)$ と定義した。以上より

$$Z_{\psi} = \int_{-T \leq t \leq T} \mathcal{D}\phi e^{-S} \psi_0(\phi(-T)) \psi_0^*(\phi(T)) \quad (2.62)$$

¹²⁾ 厳密には時空における d 次元の空間的超曲面を許すべきである。こうしておけば、時空の対称性による時間の取り方の不定性に対して柔軟である。以下では時間は固定して議論する。

¹³⁾ 第 2 式については最後の等号で $\phi(t) \rightarrow \phi(-t)$ という変数変換を行った。作用 S の中については $\phi(t) \rightarrow \phi(-t)$ と $t \rightarrow -t$ の同時変換で $S^* \rightarrow S$ であることを要求した。これはボソン場の作用については成り立つが、フェルミオンに関しては境界条件と共に吟味する必要がある。また、Lorentz 形式では成り立たない。

を得る。 $T \rightarrow \infty$ とすると真空が取り出されて分配関数となる。

さて、純粋状態 $|\psi\rangle = e^{-HT} |\psi_0\rangle$ のエンタングルメント・エントロピーを考えよう。 A へ簡約化された密度行列は、

$$\begin{aligned}\rho_A &= \frac{1}{Z_\psi} \text{Tr}_B |\psi\rangle \langle \psi| \\ &= \frac{1}{Z_\psi} \int \mathcal{D}\phi^1 \mathcal{D}\phi^2 \text{Tr}_B [|\phi^1\rangle \langle \phi^1| \psi\rangle \langle \psi| \phi^2\rangle \langle \phi^2|] \\ &= \frac{1}{Z_\psi} \int \mathcal{D}\phi^1 \mathcal{D}\phi^2 \psi(\phi^1) \psi^*(\phi^2) \text{Tr}_B |\phi^1\rangle \langle \phi^2|\end{aligned}\quad (2.63)$$

である。ここで場 $\phi(0, \mathbf{x})$ の A, B への制限を $\phi_{A,B}(0, \mathbf{x})$ と表記することにする。同様に例えば $|\phi_A\rangle$ は (2.57) において $\mathbf{x} \in A$ と制限したもので定義し、また $\mathcal{D}\phi_A = \prod_{\mathbf{x} \in A} d\phi_{\mathbf{x}}$ とする。この下で

$$\begin{aligned}\rho_A &= \frac{1}{Z_\psi} \int \mathcal{D}\phi^1 \mathcal{D}\phi^2 \delta(\phi_B^1 - \phi_B^2) \psi(\phi^1) \psi^*(\phi^2) |\phi_A^1\rangle \langle \phi_A^2| \\ &= \int \mathcal{D}\phi_A^1 \mathcal{D}\phi_A^2 \left[\frac{1}{Z_\psi} \int \mathcal{D}\phi_B \psi(\phi_A^1, \phi_B) \psi^*(\phi_A^2, \phi_B) \right] |\phi_A^1\rangle \langle \phi_A^2|\end{aligned}\quad (2.64)$$

を得る。この表式で ρ_A の (ϕ_A^1, ϕ_A^2) 成分は [] の内部であることが分かる。

エンタングルメント・エントロピーは上の ρ_A に対して (2.38) である。しかし直接 \ln を含む表式を計算するのは困難である。そこで Renyi エントロピーと呼ばれる

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \ln [\text{Tr}_A \rho_A^n] \quad (2.65)$$

を考えることが多い。なぜなら $n \in \mathbb{N}$ に対して $\rho_A^{(n)}$ を計算した後、 n について連続であるように接続すれば、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow 1} S_A^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \ln [\text{Tr}_A \rho_A e^{(n-1) \ln \rho_A}] \\ &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \ln [\text{Tr}_A (\rho_A + \rho_A (n-1) \ln \rho_A)] \\ &= S_A\end{aligned}\quad (2.66)$$

が成り立つからである。そこで (2.64) に対して Renyi エントロピーを計算すると

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{Z_\psi^n (1-n)} \left[\int \prod_{i=1}^n \mathcal{D}\phi^i \prod_{j=1}^n \psi(\phi_A^j, \phi_B^j) \psi^*(\phi_A^{j+1}, \phi_B^j) \right] \quad (2.67)$$

となる。ただし $\phi_A^{n+1} = \phi_A^1$ としてある。

この表式は以下で説明するレプリカ法と呼ばれる手法で計算できる。今は時空の $t=0$ 面で領域 A とその補集合 B を考えているが、時空を n 個コピーしたものを用意する。それら時空を \mathcal{M}_i ($i=1, \dots, n$) とし、それぞれの $t=0$ 面で A と B に対応するものを A_i, B_i と表す。ここで、 \mathcal{M}_i 上で $t=0$ を過去か

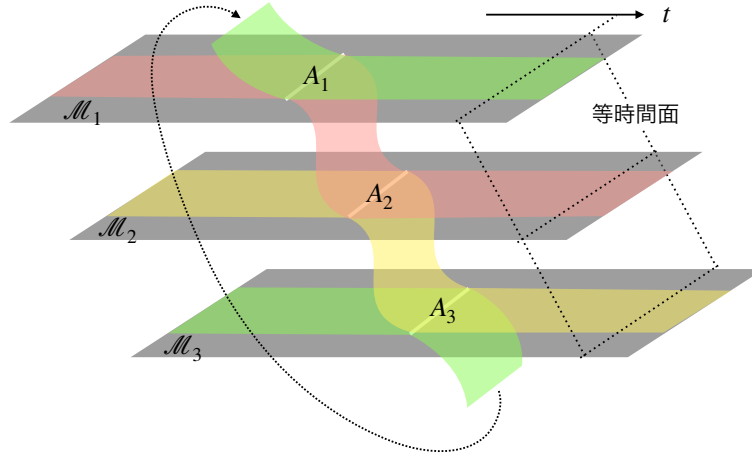


図 5. レプリカ法で考える時空 (縦につなぐ面はイメージであって実際には高さはない)

ら未来に跨ぐときに領域 A_i, B_i はそれぞれ A_{i+1}, B_i へ, 未来から過去に跨ぐときは A_i, B_i は A_{i-1}, B_i へ, といった具合に M_i と M_{i+1} を順々につないで 1 つの大きな時空 M を作る. ただし M_n は最後に M_1 とつなげられる. 図 5 には 1+1 次元の場合の図を $n=3$ に対して描いている. M_i と M_j の元々の同一点は M 上では異なる点として扱いながら, M 上の場の理論を考える.

時空 M の $t = -T$ 面上に $|\psi_0\rangle$ を各 M_i に等しく存在させて $t = -0$ まで時間発展させよう:

$$|\Psi\rangle = e^{-H(T+0)} |\Psi_0\rangle = e^{-H(T+0)} \bigotimes_{i=1}^n |\psi_0\rangle. \quad (2.68)$$

この時間発展では $t = 0$ を過去から未来へ横切らないため,

$$|\Psi\rangle \in \bigotimes_{i=1}^n [\mathcal{H}_{A_i} \otimes \mathcal{H}_{B_i}] \quad (2.69)$$

のようになっている. ここで \mathcal{H}_{A_i} は A_i の Hilbert 空間であり, \mathcal{H}_{B_i} も同様である. 一方で $\langle\Psi|$ は (2.61) の直積であるから時間発展の際は常に $t > 0$ 側にあるため, $t = -0$ においては $t = 0$ を横切っている. よって

$$\langle\Psi| \in \bigotimes_{i=1}^n [\mathcal{H}_{A_{i+1}} \otimes \mathcal{H}_{B_i}] \quad (2.70)$$

となる. このことは図 5 において領域 A の時間発展は同色を辿っていくことに対応する. 以上より $\langle\Psi|\Psi\rangle$ が (2.67) の [] に一致することが分かる. つまり, $\langle\Psi|\Psi\rangle$ を $Z_\psi^{(n)}$ と記せば

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \frac{Z_\psi^{(n)}}{Z_\psi^n} \quad (2.71)$$

という関係式が得られる.

ここでは計算を省略するが、平坦時空中の CFT_2 の区間 $A = [a, b]$ に対するエンタングルメント・エントロピーが

$$S_A = \frac{c}{3} \ln \frac{b-a}{\epsilon} \quad (2.72)$$

であることが、レプリカ法を用いて [10] で計算された。ここで c は CFT の中心電荷で、 ϵ は自由度が無限大であることに起因する UV カットオフである。

また、 CFT_2 においてはエンタングルメント・エントロピーがツイスト演算子と呼ばれるプライマリ演算子の 2 点相関関数から計算されることも分かっている [11, 12]。ツイスト演算子とはスケーリング次元が

$$d_n = \bar{d}_n = \frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right) \quad (2.73)$$

であるような複合演算子 $\mathcal{T}_n(x), \bar{\mathcal{T}}_n(x)$ である。CFT に対する 2 点相関関数の一般形を用いれば、中心電荷のみでエンタングルメント・エントロピーが定まってしまう。

ツイスト演算子を用いると、それがプライマリ演算子として変換することから変形された CFT に対してもエンタングルメント・エントロピーが計算できる。例えば空間方向が半径 L の S^1 であるような時空上に CFT をおいた場合には、2 点相関を共形変換すればよく、

$$S(\alpha) = \frac{c}{3} \ln \left[\frac{2L}{\epsilon} \sin \alpha \right] \quad (2.74)$$

が得られる。ただし CFT の計量は $ds^2 = dt^2 + L^2 d\theta^2$ (Euclidean 形式) になっており、領域 A として $\theta \in [\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha]$ をとっているが、対称性から θ_0 には依存していない。同じように、空間方向は元のままで時間方向を円周 β で S^1 コンパクト化すれば、 $A = [a, b]$ に対して

$$S_A = \frac{c}{3} \ln \left[\frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left(\frac{\pi(b-a)}{\pi\beta} \right) \right] \quad (2.75)$$

が得られる。

2.3 笠-高柳公式

1 節でも少し紹介した笠-高柳公式を紹介する。AdS/CFT 対応においてバルクが静的であるような場合を想定しよう。境界とバルクで共通の時間座標をとり、任意に時間一定面 Σ を考える。笠-高柳公式とは、境界において Σ 上に任意に領域 A をとったとき、そのエンタングルメント・エントロピーはホログラフィックには

$$S_A = \min_{\Gamma \sim A} \frac{\text{Area}(\Gamma)}{4G} \quad (2.76)$$

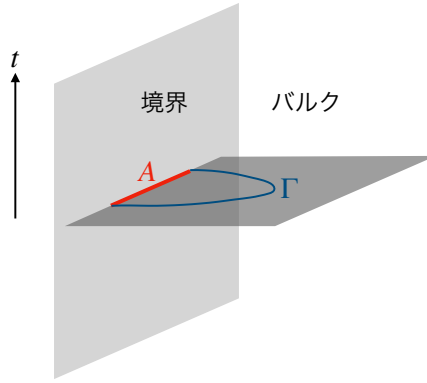


図 6. 極小曲面

で与えられるという公式である．ここで Γ はバルクの余次元 2 の曲面で， \sim はホモロジー同値¹⁴⁾ を表し， G はニュートン定数である．ホモロジー同値を考える際に，ブラックホール内部の領域は時空から取り除かれる．また $\min_{\Gamma \sim A} \text{Area}(\Gamma)$ を与える Γ を極小曲面と呼ぶ．以上は図 6 に描かれている．なお．笠-高柳公式は依然予想である．

● 具体例：BTZ ブラックホール

1 つ例として，実時間形式の有限温度 CFT_2 のエンタングルメント・エントロピーを (2.76) によって求めよう．バルクは BTZ ブラックホールで，計量は (2.21) において $d = 2$ としたものである：

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_0^2}{L^2} dt^2 + \frac{L^2}{r^2 - r_0^2} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.77)$$

ここでは μ の代わりにブラックホールの半径 r_0 をパラメータとした．具体的な計算の前に，極小曲面の振る舞いを図形的に確認しておこう．図 7 はバルクのある時間一定面を表している．ブラックホールがある場合は， A とホモロジー同値な曲面は図の 2 種類がある．特に 2 つ目は，ブラックホールの表面と A の補集合とホモロジー同値な面の和になっている． A が十分に小さければブラックホールの表面積より面積が小さい Γ が図の左の形で探せるはずである．しかし A として全体を取ればホモロジー同値な曲面はブラックホールを囲むような面しかなく，その中で面積が最小のものはブラックホールの表面に他ならない．よって A を空集合から次第に大きくしていくと，ある段階で極小曲面が図の左から右の形に移ると予想される．

実際に解析的な値を求めよう．まず BTZ ブラックホール時空に対して時間一定面を考え，空間 2 成

¹⁴⁾ 簡単に述べると $X \sim Y$ とは，領域 $X \cup Y$ が 1 次元高いある領域 Z の境界 ∂Z になっていることである．

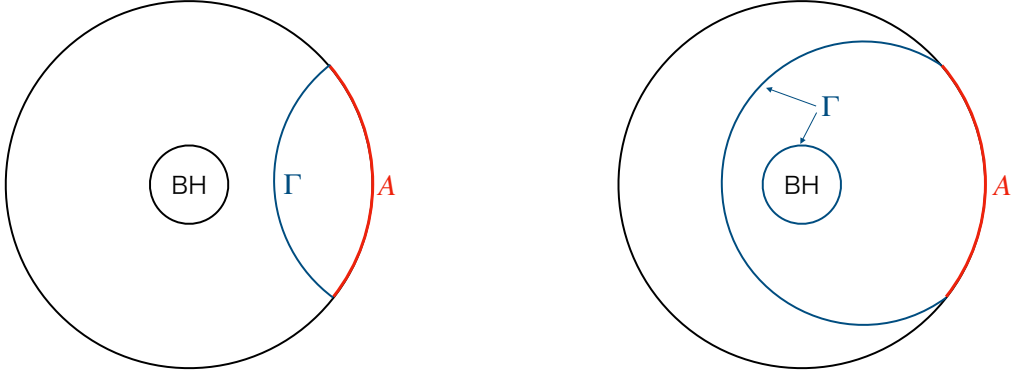


図 7. BTZ ブラックホールにおけるバルクの曲面. A とホモロジー同値な曲面は図の 2 種類が考えられる.

分 (r, θ) に対する測地線方程式を解く. 境界の $\theta = \theta_0 \pm \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) に端点を持つような解は

$$r(p) = \sqrt{p^2 + \frac{r_0^2}{\tanh^2(r_0\alpha/L)}},$$

$$\theta(p) = \theta_0 + \frac{L}{r_0} \tanh^{-1} \left[\frac{p \tanh(r_0\alpha_0/L)}{\sqrt{p^2 + r_0^2/\sinh^2(r_0\alpha/L)}} \right], \quad (2.78)$$

となる. 領域 A として区間 $[\theta_0 - \alpha_0, \theta_0 + \alpha_0]$ を取ると, 図 7 の左側のクラスの中での最小の曲面はこの測地線の長さで与えられる. よって発散を正則化すればエンタングルメント・エントロピーは

$$S_1(\alpha) = \frac{L}{2G} \ln \left[\frac{2r_0}{\epsilon} \sinh \left(\frac{\alpha r_0}{L} \right) \right] + o(\epsilon^0) \quad (2.79)$$

となる. 図 7 の右側のクラスのもは,

$$S_2(\alpha) = \frac{2\pi r_0}{4G} + S_1(\pi - \alpha) = \frac{\pi r_0}{2G} + \frac{L}{2G} \ln \left[\frac{2r_0}{\epsilon} \sinh \left(\frac{(\pi - \alpha)r_0}{L} \right) \right] + o(\epsilon^0) \quad (2.80)$$

と求まる.

領域 A のエンタングルメント・エントロピーは

$$S(\alpha) = \min \{S_1(\alpha), S_2(\alpha)\} \quad (2.81)$$

で与えられる. 上で述べたようにある α_0 で $S_1(\alpha_0) = S_2(\alpha_0)$ となり, $\alpha \leq \alpha_0$ では S_1 が, $\alpha_0 < \alpha$ では S_2 が選択される. (α_0 は単純な計算で一意的に求まるが, 煩雑なだけなので省略する.) 今は空間方向が S^1 コンパクト化されていて, さらに Lorentz 形式であるため (2.75) とは異なる.

3 バルク時空再構築

バルク再構築とは、ホログラフィーにおいて境界の理論からバルクの理論を再現することを指す。特に本研究ではバルク時空が境界の理論からどのように創発するかが主旨であり、以下では後に用いる2つのバルク時空再構築の手法を解説する。

3.1 Hole-ography

Hole-ography は静的なバルクに時間一定面 Σ をとり、そこでの曲線やその長さ [5]、および点や距離 [6] をホログラフィックに与える手法である。バルクが静的なので Σ の取り方によらず同一の議論が適用できる。

まずは Σ 上の閉曲線の境界の言葉での記述について説明し、閉曲線が収縮する極限として点の定義を与える。次に開曲線を考えた後に、 Σ 上の2点間の測地線距離についての公式を紹介する。最後に hole-ography のホログラフィックな立場を整理する。

• 閉曲線

しばらくはバルクが pure AdS₃ である場合について考える：

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (3.1)$$

時間一定面 Σ として $t = 0$ を考えることにし、その上に任意に閉曲線 $C : (r, \theta) = (R(\eta), \Theta(\eta))$ を考えよう。ただしパラメータは $\eta \in \mathbb{R}$ で、 η と $\eta + 2\pi$ は同一点を表すものとする。 C を境界の言葉で表すことがここでの目標である。

そのために、 C 上の各点において C に接する Σ 上の空間的測地線を考える (図 8)。AdS₃ 時空の曲率は負であるため、延長不可能な測地線の両端点は境界上に存在する。したがって、測地線が到達する端点2つを特定することで接点を特徴づけられ、それを全ての η について行えば C を境界の言葉で表現できる。

AdS₃ の時間一定の測地線は一般にパラメータ $p \in \mathbb{R}$ で

$$r(p) = \sqrt{r_0^2 + p^2}, \quad \theta(p) = \theta_0 + \tan^{-1} \left[\frac{pL}{r_0 \sqrt{p^2 + r_0^2 + L^2}} \right] \quad (3.2)$$

のように表せる。ただし r_0 と θ_0 は定数である。この測地線が C と $(R(\eta), \Theta(\eta))$ で接することを要請すると、

$$r_0 = R(\eta) \left[\frac{L^2 v(\eta)^2}{R(\eta)^2 (R(\eta)^2 + L^2)} + 1 \right]^{-1/2}, \quad (3.3)$$

$$\theta_0 = \Theta(\eta) - \tan^{-1} \left[\frac{L^2 v(\eta)}{R(\eta) (R(\eta)^2 + L^2)} \right] \quad (3.4)$$

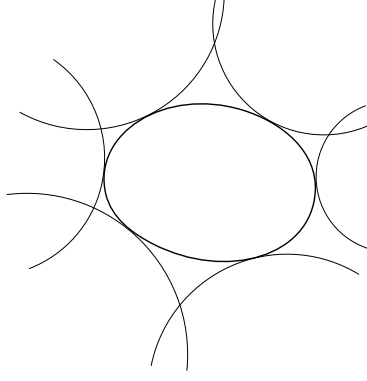


図 8. 閉曲線を包絡線とする測地線群

を得る. ここで $v(\eta) := R'(\eta)/\Theta'(\eta)$ とおいた. 式 (3.2) の端点は $p \rightarrow \infty$ を見れば良く,

$$\theta(p \rightarrow \pm\infty) = \theta_0 \pm \tan^{-1} \frac{L}{r_0}. \quad (3.5)$$

従って端点を $\theta_0 \pm \alpha$ のように表せ, (3.4) によって

$$\alpha(\eta) = \tan^{-1} \left[\frac{L}{R(\eta)} \sqrt{1 + \frac{L^2 v(\eta)^2}{R(\eta)^2 (R(\eta)^2 + L^2)}} \right], \quad (3.6)$$

$$\theta_0(\eta) = \Theta(\eta) - \tan^{-1} \left[\frac{L^2 v(\eta)}{R(\eta) (R(\eta)^2 + L^2)} \right] \quad (3.7)$$

であることがわかる. これは次のように逆解きできる:

$$R(\eta) = L \cot \alpha(\eta) \sqrt{\frac{1 + v_\alpha(\eta)^2 \tan^2 \alpha(\eta)}{1 - v_\alpha(\eta)^2}}, \quad (3.8)$$

$$\Theta(\eta) = \theta_0(\eta) - \tan^{-1} [v_\alpha(\eta) \tan \alpha(\eta)]. \quad (3.9)$$

ただし $v_\alpha(\eta) := \alpha'(\eta)/\theta_0'(\eta)$ とおいたが, これは $-1 < v_\alpha(\eta) < 1$ を満たす必要があるとわかる. すなわちバルクの Σ 上の曲線 $(r, \theta) = (R(\eta), \Theta(\eta))$ は, 境界上の区間

$$I_\alpha(\eta) := [\theta_0(\eta) - \alpha(\eta), \theta_0(\eta) + \alpha(\eta)] \quad (I_\alpha(\eta + 2\pi) \equiv I_\alpha(\eta) \pmod{2\pi}) \quad (3.10)$$

の集合 $\{I_\alpha(\eta) \mid \eta \in \mathbb{R}\}$ によって一意的に定まる.

以上より境界からバルクの閉曲線は次のように定義される (図 9). ただし以下では混乱のない限り $\theta_0(\eta)$ を単に $\theta(\eta)$ と記す. まず $\theta\alpha$ 平面を想定し, その上の閉曲線 $C_\alpha : (\theta, \alpha) = (\theta(\eta), \alpha(\eta))$ を $-1 < \alpha'(\eta)/\theta'(\eta) < 1$ を満たすように定義する. 次に境界上の $\theta = \theta(\eta) \pm \alpha(\eta)$ を端点にもつ Σ 上の測地線を γ_η とし, 測地線群 $\{\gamma_\eta \mid \eta \in \mathbb{R}\}$ を考える. この測地線群の包絡線としてバルクの曲線が 1 つ定まる. ただしここでの議論は, 曲線の接線が至るところで定義されている必要があり, 従ってなめらかな曲線に制限される.

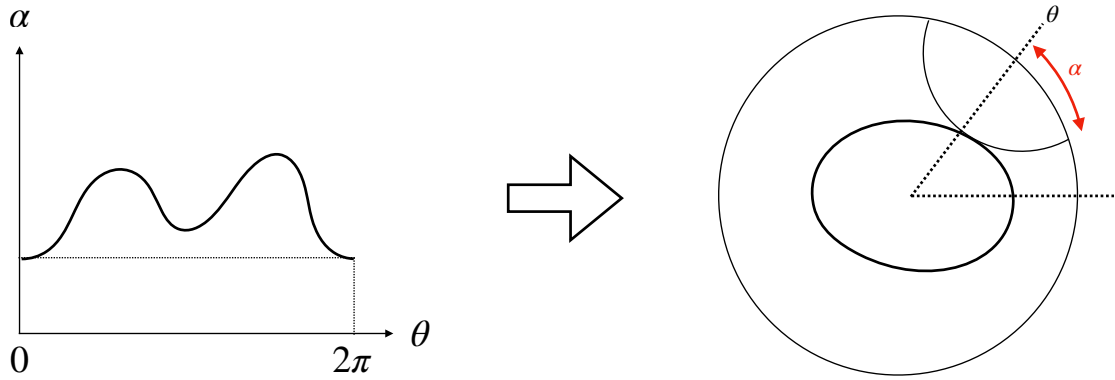


図 9. バルクの時間一定面上の閉曲線のホログラフィックな定義

● 点の定義

以上のようにして Σ 上の閉曲線が $(\theta(\eta), \alpha(\eta))$ によって定まることがわかった。これより Σ 上の点を境界の言葉で表すには、閉曲線が点に収縮する極限に対する $(\theta(\eta), \alpha(\eta))$ のクラスを考えれば良い。

そこで Σ 上の閉曲線 C とその内部 A に対して、Gauss-Bonnet の定理

$$\int_C ds \sqrt{h} K = 2\pi - \int_A dA R \quad (3.11)$$

を考えよう。ここで dA は面素、 R は曲率、 $ds\sqrt{h}$ は固有線素、 K は C に沿った外的曲率である。 Σ 上で $R < 0$ であるから右辺の最小値は 2π で、 2π を取ることは A が 1 点に収縮する極限に対応する。左辺は (3.8) と (3.9) によって

$$\int_C ds \sqrt{h} K = \int d\theta \frac{\sqrt{1 - \alpha'(\theta)^2}}{\sin \alpha(\theta)} \quad (3.12)$$

と書ける。ここではパラメータ η を θ そのものにとったが、点を表すにはそれで十分である。¹⁵⁾

つまり Σ 上の点は (3.12) を最小にするような関数 α と 1 対 1 に対応している。積分 (3.12) の Euler-Lagrange 方程式は 2 階の微分方程式であるので、関数 α は 2 つの積分定数を獲得する。すなわち、(3.12) の α の集合が境界の言葉で定義した多様体 Σ であり、その座標は積分定数であると解釈するのである。このホログラフィックな Σ を Σ_∂ と記す。

● 曲線の長さ

さて、 Σ_∂ に Σ と同じ計量を入れることを考えたい。Holography では Σ_∂ 上の測地線距離を与えることができる。これを見るための準備として、曲線の長さの記述方法を考えていこう。

¹⁵⁾ この極限においては $\{\gamma_\eta\}$ は対象のバルクの点を通る測地線の集合となる。従って $\theta(\eta)$ に対して $\alpha(\eta)$ は一意に定まっており、 $\eta = \theta$ に選んで良い。

式 (2.74) と (2.20) によって境界のエントラングメント・エントロピーは

$$S(\alpha) = \frac{L}{2G} \ln \left[\frac{2L}{\mu} \sin \alpha \right] \quad (3.13)$$

である。これを用いて Σ 上の閉曲線 C の周長は次式で与えられる：

$$\frac{\text{length}}{4G} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\eta \theta'(\eta) S'(\alpha(\eta)). \quad (3.14)$$

ここで $S'(\alpha(\eta))$ は S の導関数の引数を $\alpha(\eta)$ に選んだ値である。

この公式を導こう。左辺は

$$\text{l.h.s.} = \frac{1}{4G} \int_0^{2\pi} d\eta \sqrt{\left(1 + \frac{R(\eta)^2}{L^2}\right)^{-1} R'(\eta)^2 + R(\eta)^2 \Theta'(\eta)^2} \quad (3.15)$$

であるが、(3.8) と (3.9) によって

$$\text{l.h.s.} = \frac{L}{4G} \left[\theta'(\eta) \cot \alpha(\eta) + \frac{\theta'(\eta)\alpha''(\eta) - \theta''(\eta)\alpha'(\eta)}{\alpha'(\eta)^2 - \theta'(\eta)^2} \right] \quad (3.16)$$

と書き換えられる。一方で右辺は

$$\text{r.h.s.} = \frac{L}{4G} \int_0^{2\pi} d\eta \theta'(\eta) \cot \alpha(\eta) \quad (3.17)$$

となる。従って (3.9) を使うことで

$$\text{l.h.s.} - \text{r.h.s.} = \int_0^{2\pi} d\eta f'(\eta) = 0 \quad (3.18)$$

を得る。ただし

$$f(\eta) = \frac{L}{8G} \ln \left(\frac{\sin(\alpha(\eta) + \Theta(\eta) - \theta(\eta))}{\sin(\alpha(\eta) - \Theta(\eta) + \theta(\eta))} \right) \quad (3.19)$$

とおいた。

以上で公式は示されたが、開曲線として $\eta \in [\eta_i, \eta_f] \subset [0, 2\pi]$ を考えると

$$\frac{\text{length}}{4G} = \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_f} d\eta \theta'(\eta) S'(\alpha(\eta)) + f(\eta_f) - f(\eta_i) \quad (3.20)$$

という公式が得られる。測地線の計算を行えば、 $4Gf(\eta)$ は γ_η の $\theta(\eta)$ から $\Theta(\eta)$ までの長さに一致することがわかる。ただし $\theta(\eta) < \Theta(\eta)$ の場合に正の値を返すような符号付きの長さである。このことは次に距離の定義において利用する。また (3.9) より、 $f(\eta) = 0$ は $\alpha'(\eta) = 0$ で実現される。

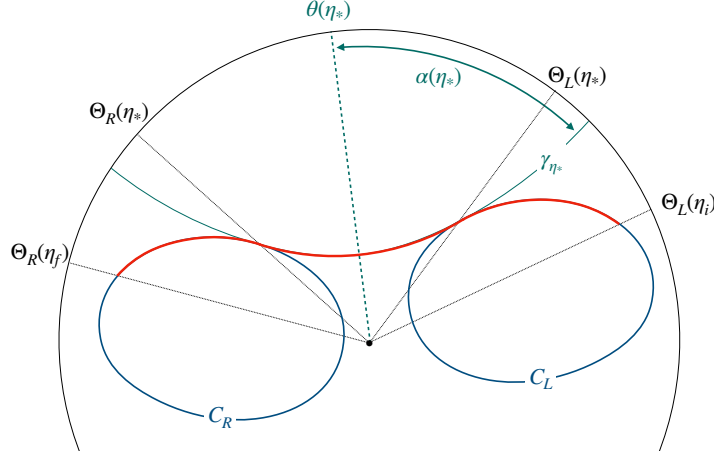


図 10. $(\theta(\eta), \alpha(\eta))$ が滑らかでない点を含む場合のバルクの曲線. 測地線 γ_{η_*} は定義より C_L と C_R の両方に接するため, 両者は γ_{η_*} によって滑らかにつながる. 図では C_L と C_R を外挿して閉曲線にしてあるが, 本文中では赤い曲線に重なる部分を C_L, C_R としている.

• 距離の定義

境界の $(\theta(\eta), \alpha(\eta))$ が $\eta = \eta_* \in (\eta_i, \eta_f)$ を除いて滑らかである場合を考える. 曲線を $\eta_i \leq \eta \leq \eta_*$ の部分は滑らかなので, バルクには対応する開曲線 C_L がある. 同様に $\eta_* \leq \eta \leq \eta_f$ に対応する曲線を C_R とする. それぞれ対応する量には添字 L, R を付けて区別する.¹⁶⁾ エンタングルメント・エントロピーと長さの関係式を見よう. 式 (3.20) を使って

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_f} d\eta \theta'(\eta) S'(\alpha(\eta)) &= \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_*} d\eta \theta'_L(\eta) S'(\alpha_L(\eta)) + \frac{1}{2} \int_{\eta_*}^{\eta_f} d\eta \theta'_R(\eta) S'(\alpha_R(\eta)) \\ &= \frac{\text{length of } C_L}{4G} - f_L(\eta_*) + f_L(\eta_i) \\ &\quad + \frac{\text{length of } C_R}{4G} - f_R(\eta_f) + f_R(\eta_*) \end{aligned} \quad (3.21)$$

である. ここで $4G(f_R(\eta_*) - f_L(\eta_*))$ が γ_{η_*} の $\Theta_L(\eta_*)$ から $\Theta_R(\eta_*)$ までの長さであることを考えると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_f} d\eta \theta'(\eta) S'(\alpha(\eta)) &= \frac{\text{length of } C_L + C_R}{4G} + f_L(\eta_*) - f_R(\eta_*) \\ &\quad + \frac{\text{length of } \gamma_{\eta_*} \text{ in } \Theta_L(\eta_*) \leq \theta \leq \Theta_R(\eta_*)}{4G} \end{aligned} \quad (3.22)$$

である (図 10).

ここで 2 点間の距離を境界の言葉で表す方法を考えよう. Σ 上の 2 点 p, q に対応する境界の関数をそれぞれ $\alpha_p(\theta), \alpha_q(\theta)$ としよう. 特に $\alpha'_p(\phi_p) = \alpha'_q(\phi_q) = 0$ であり, $\phi_p < \phi_* < \phi_q$ なる ϕ_* で $\alpha_p(\phi_*) = \alpha_q(\phi_*)$

¹⁶⁾ この L, R は区間の左右に由来するもので, バルクにおいて C_L が C_R より左にあるとは限らない.

である場合を考える。このとき

$$\alpha(\theta) := \begin{cases} \alpha_p(\theta) & (\phi_p \leq \theta \leq \phi_*) \\ \alpha_q(\theta) & (\phi_* < \theta \leq \phi_q) \end{cases} \quad (3.23)$$

に対応するバルクの開曲線は図 10 において $C_{L,R}$ が p, q に収縮した場合になる。特に (3.22) では $C_{L,R}$ の長さは 0 であり, $\alpha'_p(\phi_p) = \alpha'_q(\phi_q) = 0$ によって $f_{L,R}(\eta_*)$ も消える (今は $\eta_* = \phi_*$)。従って p, q の間の測地線距離を $d(p, q)$ とすれば

$$d(p, q) = \frac{1}{2} \left| \int_{\phi_p}^{\phi_q} d\theta S'(\alpha(\theta)) \right| \quad (3.24)$$

を得る。絶対値は $\phi_q < \phi_p$ の場合にも使えるように付けた。これで Σ_θ 上に距離が導入できる。

- 要約：ホログラフィックな点と距離

最後にホログラフィックな立場で AdS_3 中の Σ 上の点と距離を定義する方法をまとめる。境界の理論でのエンタングルメント・エントロピーを $S(\alpha)$ とする。式 (3.13) の右辺を (3.12) で書き直すと

$$I[\alpha] = \int d\theta \sqrt{-S''(\alpha(\theta))(1 - \alpha'(\theta)^2)} \quad (3.25)$$

であり, これを最小にする α を点関数と呼ぶことにする。点関数は $I[\alpha]$ の Euler-Lagrange 方程式

$$(1 - \alpha'(\theta)^2)S'''(\alpha(\theta)) + 2\alpha''(\theta)S''(\alpha(\theta)) = 0 \quad (3.26)$$

を満たし, α は 2 つの積分定数 λ^1, λ^2 で特徴づけられる。バルクの多様体としての Σ は境界の立場では点関数の張る集合 Σ_θ のことであり, 点関数 1 つ 1 つが点で (λ^1, λ^2) が座標となる。

Σ_θ 上の 2 点 α, β (共に点関数) の距離は次のように導入する。それぞれ極値を与える θ を ϕ_α, ϕ_β とし, ある ϕ_* がその間に 1 つだけあって α と β が一致するものとする。この場合には 2 点間の距離 $d(\alpha, \beta)$ は

$$d(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left| \int_{\phi_\alpha}^{\phi_\beta} d\theta S'(\gamma(\theta)) \right| \quad (3.27)$$

で与えられる。ここで γ は ϕ_α と ϕ_* の間では α , ϕ_β と ϕ_* の間では β を取るように定義する (点関数ではない)。なお, より一般の関係にある α, β に対しての距離の公式もあるが, ここでは [8] での手法の理解に必要なこの公式の解説に留めておく。

このようにして AdS_3 に対して, Σ 上の点と距離を Σ_θ 上の点と距離としてホログラフィックに定義できることがわかった。実は [6] において, BTZ ブラックホール (ブラックホールの外) や頂角欠損のある AdS_3 に対してもここでの議論が成り立つことがわかっている。また [8] においては AdS_3 ソリトンに関してもうまくいくことがわかった (本論文の後半でこれを使って時空が再構築されることを見る)。そこで以上のホログラフィックな定義は他の静的な漸近 AdS_3 時空に対しても成り立つと予想する。ただしエンタングルメント・エントロピーが境界の区間の長さだけで計算できるような場合を想定した定式化であるため, 境界の理論が θ に依存しない状態にある必要がある。

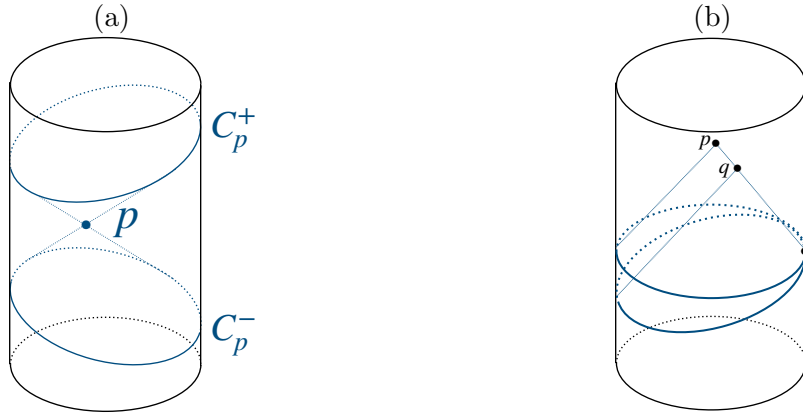


図 11. (a) 未来と過去の切断 (b) ヌル的に離れた 2 点と対応する切断

3.2 光円錐切断の手法

ここでは光円錐切断を用いたバルク再構築の手法について解説するが、証明は数学的に高度であるため省略する。 M を漸近的 AdS_d 時空であるとする。¹⁷⁾ 点 $p \in M$ の過去の光円錐切断 (略して切断) を C_p^- と記すと、それは

$$C_p^- = \partial J^-(p) \cap \partial M \quad (3.28)$$

で定義される。ここで ∂A は領域 A の境界を意味し、 $J^-(p)$ は p の因果的過去のことである。同じように未来の切断は

$$C_p^+ = \partial J^+(p) \cap \partial M \quad (3.29)$$

で定義される。これら 2 つの切断は図 11(a) に描かれている。

過去の切断は以下の基本的な性質を持つ。

- どの過去の切断も完備な空間的な超曲面である。
- $p \in I^+(\partial M)$ ならば、過去の切断 C_p^- はただ 1 つ存在する。ここで I^+ は時間的過去を意味する。
- $C_p^- \cap C_q^-$ が空でない開集合を持つことは $p = q$ と同値である。

これらの性質によって、 $I^+(\partial M)$ と過去の切断の集合の間に 1 対 1 の対応関係があることがわかる。また 3 つ目の性質から、切断同士を区別するのに切断全体の形を知る必要はない。さらに過去の切断の集合はバルクの因果構造に関する次の情報を持っている (図 11(b))。

- C_p^- と C_q^- が 1 点のみで滑らかに接するなら、 p と q はヌル的に離れている。

¹⁷⁾ [13] では厳密な証明を与えるためにより数学的な条件が少し追加される。

これら4つの性質は+と-を入れ替えることで未来の切断にも当てはまる。

これまでの内容はホログラフィーの要素はなく、一般に漸近 AdS 時空で成り立つ話である。もし切断を境界の理論の言葉で表現できるのなら、上の言明を利用してバルクの点と幾何を再構築できそうである。

境界の相関関数の発散によって切断を特定する方法が [13] で提案されている。一般に相関関数は、相関中の各点が相互作用の点とヌル的に離れている場合には発散する。境界の相関関数のうち、バルク理論の描像ではその相互作用の点がバルクに存在することによって起こる発散があると、[14] で示唆された。これをバルク点特異性という。彼らはバルク点特異性の存在を低次元の AdS 時空で示したが、[13] ではより一般の漸近 AdS 時空においても存在するだろうと議論されている。しかしバルク点特異性によって切断を得るためには $(d+2)$ 点相関関数の計算が必要となり、現実的でない。後に4節で紹介する手法では切断を別の手法で特定するため、この部分の解説は [13] に委ねることにする。ここでは境界の言葉で切断が得られたと仮定しよう。

さて、切断からバルクの再構築を行う方法を考えよう。ホログラフィックに定義した過去の切断の集合 \mathcal{C}^- は d 個のパラメータで区別できるはずである。なぜなら上で示したように、 \mathcal{C}^- と $I^+(\partial M)$ の間には1対1の写像が原理的には存在するからである。そこで \mathcal{C}^- の元を C_λ^- ($\lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^{d-1})$) のようにラベルしよう。光円錐切断の手法においては、 \mathcal{C}^- が多様体 $I^+(\partial M)$ であり、その座標が λ であると解釈する。¹⁸⁾

これで多様体は用意できたので、計量を導入しよう。上の4つ目の性質から、 C_λ^- と $C_{\lambda'}^-$ が1点で接しているときに、 \mathcal{C}^- 上でそれらがヌル的に離れているような計量を与えるべきである。そこで $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ として、 $\delta\lambda$ の1次までで接する条件を考えれば、 $C_\lambda^- \in \mathcal{C}^-$ におけるヌルベクトルを得ることになる。そのようなベクトルを $d(d+1)/2$ 個取ってきて $n_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, d(d+1)/2$) としよう。これらが全てヌルであるという条件

$$g_{\mu\nu}(\lambda)n_i^\mu(\lambda)n_i^\nu(\lambda) = 0 \quad (i = 1, \dots, d(d+1)/2) \quad (3.30)$$

から $g_{\mu\nu}(\lambda)$ を決定することができる。ただしこの連立方程式が斉次であるために、計量全体に局所的なスケール因子を乗じる不定性が残る。このような共形因子の差を無視した計量を共形計量と呼ぶ。

¹⁸⁾ 過去の切断が完全に全て得られた場合はこれでよいが、全ての切断が得られる方法は今のところわかっていない。実際にバルク点特異性によって得られる過去の切断は、最大でも $I^-(\partial M) \cap I^+(\partial M)$ の各点に対応したものであり、4での手法も同じ領域である。この場合には未来と過去、どちらの切断の集合を用いるかに差がない。

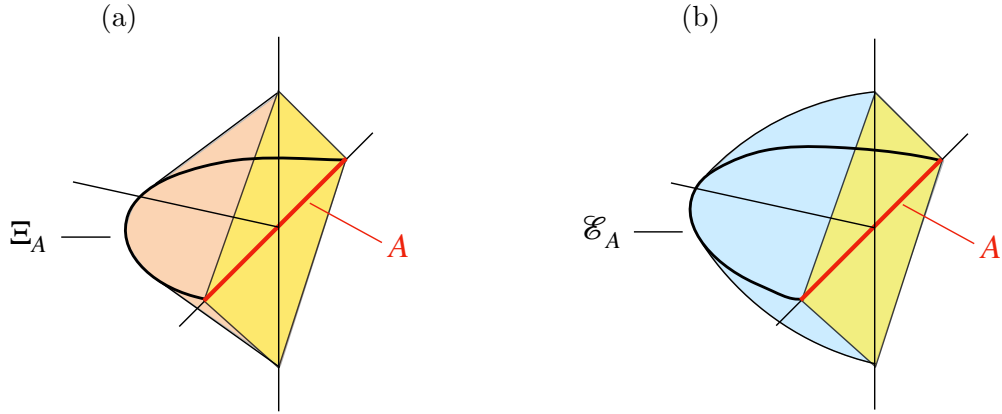


図 12. (a) Causal wedge (b)Entanglement wedge

4 今回の手法

ここでは [8] の内容を扱う. すでに 1 節で述べたように, 前節の 2 つの手法を組み合わせることで 3 次元の静的なバルクを構築する手法を考えたい.

4.1 Hole-ography における光円錐切断

光円錐切断の手法では共形計量まで特定することができた. そこで Hole-ography によって各点の周りで微小距離を 1 つでも求めることができれば共形因子が特定できる. しかし Hole-ography では点関数の集合が, 光円錐切断の手法では切断の集合がそれぞれバルク時空のホログラフィックな定義であり, それらの間の対応関係が不明瞭である. その対応関係が明らかにならねばこの作戦はうまくいかない. 残念ながら一般的な対応は未解決であるが, 以下で説明するように entanglement wedge と causal wedge が一致する際は明確な対応関係を持ち, 上の作戦が使える.

• Entanglement wedge と causal wedge

まずは 2 つのウェッジについての定義の確認を行う. 簡単のため, 今回必要となる 3 次元の静的なバルクについての定義を与える.

時間一定面 Σ をとり, hole-ography の場合と同様に Σ 上で境界の区間 A を考える. 境界上での A の因果的依存領域を \diamond_A とする. このとき A の causal wedge とは $J^-(\diamond_A) \cap J^+(\diamond_A)$ のことであり, バルクで Σ と $\partial\mathcal{C}(A)$ が交わってできる 1 次元の曲線を Ξ_A と書く (図 12). 次に A の極小曲面 \mathcal{E}_A は Σ 上にあり, \mathcal{R}_A を Σ 上で $\partial\mathcal{R}_A = A \cup \mathcal{E}_A$ を満たす面とする. この \mathcal{R}_A のバルクにおける因果的依存領域を entanglement wedge という (図 12).

ただし例えばブラックホール時空のような場合には、 \mathcal{E}_A がブラックホールを覆わないように A としてそれほど大きくないものを考える。このことによって 4.3 節での手法に問題は生じない。従ってこの場合には \mathcal{E}_A は測地線となる。

• 2 つの wedge の一致と光円錐切断

ここで A によらずに $\mathcal{E}_A = \Xi_A$ を課すと、光円錐切断と hole-ography の関係が明確になる。バルクの点 p と対応する点関数 α_p をとり、境界の区間の族 $I_p(\theta) = [\theta - \alpha_p(\theta), \theta + \alpha_p(\theta)]$ それぞれに対して $\mathcal{E}_{I_p(\theta)} = \Xi_{I_p(\theta)}$ であるとする。¹⁹⁾ 今は \mathcal{E}_A が測地線なので点関数の性質から p は \mathcal{E}_A 上、つまり Ξ_A 上にあるため、 $\diamond_{I_p(\theta)}$ の上下の頂点と p はヌルの的に離れている。すなわち $\diamond_{I_p(\theta)}$ の θ を動かした際に上下の頂点が描く軌跡が未来と過去の切断である。これは Σ の時間を t_0 として

$$C_p^\pm(\theta) = t_0 \pm L\alpha_p(\theta) \quad (4.1)$$

という関係式を意味する。

式 (4.1) は、ひとたびエンタングルメント・エントロピーから点関数が得られたら、それが直接的に切断になることを意味している。よって因果構造 (共形計量) と空間的な距離の両方がエンタングルメント・エントロピーから得られることになる。ここでバルク点特異性から出発して切断を手に入れ、その後 (4.1) によって点関数を得るという手順も考え得るが、4.3 節での手法では結局エンタングルメント・エントロピーを使うことを避けられない。

4.2 共形因子の決定方法

光円錐切断の手法によって共形計量が得られていると仮定する。今や共形因子を決定するだけで良いので、ヌルでないベクトルのノルムが各点で 1 つでも求まれば十分である。そこで hole-ography の (3.27) を用いる。

式 (3.27) を α_λ と $\alpha_{\lambda+\delta\lambda}$ に対して用いたいが、それにはある条件が満たされねばならなかった。それは、 α_λ を最小²⁰⁾ にする引数を ϕ 、 $\alpha_{\lambda+\delta\lambda}$ のそれを $\phi + \delta\phi$ とした際に、 ϕ と $\phi + \delta\phi$ の間で 1 度だけ 2 つの関数が一致せねばならない。これを満たす $\delta\lambda, \delta\phi$ が 1 組でも見つければ良いが、それは $\alpha''(\phi) \neq 0$ であれば以下の手順で見つけられる。

まず $\delta\lambda, \delta\phi$ の条件は

$$\alpha'_{\lambda+\delta\lambda}(\phi + \delta\phi) = 0, \quad \alpha_{\lambda+\delta\lambda}(\phi + \delta\phi) = \alpha_\lambda(\phi) \quad (4.2)$$

¹⁹⁾ ただしブラックホール時空などの存在を考慮すれば、この条件は α_p の最小値の付近の θ で成り立つと考えるべきである。これは (4.1) の成立に関しても言えるが、やはり問題は生じない。細かい議論は 5 節において行う。

²⁰⁾ 以前は極値であればよかったが、脚注 19) を考慮して最小値に限定した。

である。これは展開して

$$\delta\lambda^i \frac{\partial\alpha_\lambda}{\partial\lambda^i}(\phi) = 0, \quad \delta\phi = -\frac{\delta\lambda^i}{\alpha_\lambda''(\phi)} \frac{\partial\alpha_\lambda'}{\partial\lambda^i}(\phi) \quad (4.3)$$

となる (i は縮約されて 1, 2 を走る)。つまり $\alpha''(\phi) \neq 0$ に対してはこのような $\delta\lambda, \delta\phi$ を用いれば (3.27) が使えることになる。そして微小量の 1 次まででは (3.27) は

$$d(\alpha_\lambda, \alpha_{\lambda+\delta\lambda}) = 2G \left| \delta\phi S'(\alpha_\lambda(\phi)) \right| \quad (4.4)$$

にまで簡単になる。

他にも hole-ography を使って微小なノルムを与える方法はあると思われる。しかしほとんどの場合には $\alpha_\lambda''(\phi) \neq 0$ であると期待して、しかしそうでない場合は別の手段を探さねばならない。

4.3 再構築の手順

再構築の手順を述べる準備が整った。我々はバルクが静的な漸近 AdS₃ 時空で、回転対称 (θ の並進) である場合を想定している。これは境界の立場では、境界の理論が (t, θ) に非依存な状態に対応している。例えば理論の真空などがこれに当たる。なお、境界の計量は $ds^2 = -dt^2 + L^2 d\theta^2$ である。

以下が再構築の手順である。

- (1) バルクに時間一定面 $t = \lambda^0$ をとる。関数 α が

$$I[\alpha] = \int d\theta \sqrt{-S''(\alpha(\theta))(1 - \alpha'(\theta)^2)} \quad (4.5)$$

を停留させるとき、 α を点関数という。この Euler-Lagrange 方程式は

$$(1 - \alpha'(\theta)^2)S'''(\alpha(\theta)) + 2\alpha''(\theta)S''(\alpha(\theta)) = 0 \quad (4.6)$$

である。

- (2) Euler-Lagrange 方程式を解くと、 α は 2 つの積分定数 λ^1, λ^2 を獲得する。そこで $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$ によって α_λ とラベルする。このとき $\mathcal{M} = \{\alpha_\lambda | \lambda\}$ がバルク時空 (ブラックホールの外) であり、 λ が座標であると解釈する。

- (3) 過去の切断の集合は

$$\{C_\lambda^- = \lambda^0 - L\alpha_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \quad (4.7)$$

である。未来の切断も同様に得られるが、今回はどちらか一方で十分である。

- (4) C_λ^- と $C_{\lambda+\delta\lambda}^-$ が 1 点で接するような微小な $\delta\lambda$ を 6 つ見つけて $n_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, 6$) と名付ける。これらがヌルベクトルであるという条件

$$0 = g_{\mu\nu}(\lambda)n_i^\mu(\lambda)n_i^\nu(\lambda) \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (4.8)$$

から共形計量が得られる。

- (5) ϕ を α_λ を最小にする引数とする。これに対し $\delta\lambda$ ($\delta\lambda^0 = 0$) と $\delta\phi$ を

$$\delta\lambda^i \frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial \lambda^i}(\phi) = 0, \quad \delta\phi = -\frac{\delta\lambda^i}{\alpha_\lambda''(\phi)} \frac{\partial \alpha_\lambda'}{\partial \lambda^i}(\phi) \quad (4.9)$$

のように取ると, \mathcal{M} 内での微小距離

$$d(\alpha_\lambda, \alpha_{\lambda+\delta\lambda}) = 2G \left| \delta\phi S'(\alpha_\lambda(\phi)) \right| \quad (4.10)$$

が得られる。

- (6) 共形因子は (4.9) の $\delta\lambda, \delta\phi$ と共形因子が不定の計量 $g_{\mu\nu}$ によって

$$2G \left| \delta\phi S'(\alpha_\lambda(\phi)) \right| = \sqrt{g_{\mu\nu}(\lambda)\delta\lambda^\mu\delta\lambda^\nu} \quad (4.11)$$

で定まる。

2 つの wedge が一致する条件がなくとも良いと思うかもしれない。つまり切断はバルク点特異性から, 点関数は (4.6) から得て, 上の流れを実行するという考えである。ところがその場合, 一般には切断と点関数が異なるラベル (λ のこと) で記述されるため, その間の対応関係を見出さねばならない。そしてこの問題が未解決の課題として残されている。

この手順を踏めば, 2 つの wedge が一致するような時空が構成されてしまう。実際にそのような時空は次節のように存在するのだが, 境界から再構築された時空として適切であるかは検討せねばならない。それは 5 で議論する。

4.4 具体例への応用

上の手法を実際に 3 つの例, pure AdS₃, AdS₃ ソリトン, BTZ ブラックホールに対して応用する。

• Pure AdS₃

長さが 2α の区間に対しての CFT₂ のエンタングルメント・エントロピーは

$$S(\alpha) = \frac{c}{3} \ln \left(\frac{2L}{\epsilon} \sin \alpha \right) \quad (4.12)$$

と与えられる。ここで c は CFT_2 の中心電荷で、 ϵ は UV カットオフである。式 (4.6) は

$$\alpha'(\theta)^2 - 1 + \alpha''(\theta) \tan \alpha(\theta) = 0 \quad (4.13)$$

となり、解は

$$\alpha_\lambda(\theta) = \cos^{-1}[\lambda^1 \cos(\theta - \lambda^2)] \quad (4.14)$$

である。この解は $\beta = \cos \alpha$ と変数変換することで容易に導ける。

点関数が得られたら、過去の切断は

$$C_\lambda^-(\theta) = \lambda^0 - L \cos^{-1}[\lambda^1 \cos(\theta - \lambda^2)] \quad (4.15)$$

によって得られる。次に ϵ を微小定数として、

$$C_\lambda(\theta) = C_{\lambda+\epsilon n}, \quad C'_\lambda(\theta) = C'_{\lambda+\epsilon n}(\theta) \quad (4.16)$$

を満たすような $n(\lambda, \theta)$ ²¹⁾ を見つける。それは ϵ の 1 次まで展開することによって

$$\begin{aligned} n(\lambda, \theta) \propto & L\lambda^1 \sqrt{1 - (\lambda^1)^2 \cos^2(\theta - \lambda^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda^0} \\ & + \lambda^1 ((\lambda^1)^2 - 1) \cos(\theta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial \lambda^1} - \sin(\theta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

と分かる。共形計量は

$$\forall \theta, \quad g_{\mu\nu}(\lambda) n^\mu(\lambda, \theta) n^\nu(\lambda, \theta) = 0 \quad (4.18)$$

を解くことによって²²⁾

$$ds^2 = e^{\omega(\lambda)} \left[-\{1 - (\lambda^1)^2\} (d\lambda^0)^2 + L^2 (d\lambda^1)^2 + L^2 (\lambda^1)^2 \{1 - (\lambda^1)^2\} (d\lambda^2)^2 \right] \quad (4.19)$$

のように計算される。ここで e^ω は不定の共形因子である。

残るは ω を求めることである。今の場合 $\phi = \lambda^2$ であり、これに対して $\delta\lambda^1 = 0, \delta\phi = \delta\lambda^2$ が (4.9) を満たすことが分かる。そこで (4.11) は次のようになる。

$$\frac{2Gc}{3} \frac{\lambda^1 \delta\lambda^2}{\sqrt{1 - (\lambda^1)^2}} = L e^{\omega(\lambda)/2} \lambda^1 \sqrt{1 - (\lambda^1)^2} \delta\lambda^2, \quad \text{i.e.} \quad e^{\omega(\lambda)} = \frac{1}{(1 - (\lambda^1)^2)^2}. \quad (4.20)$$

ただしこの段階で関係式 $c = 3L/2G$ を用いた。従って

$$ds^2 = -\frac{(d\lambda^0)^2}{1 - (\lambda^1)^2} + \frac{(L d\lambda^1)^2}{\{1 - (\lambda^1)^2\}^2} + \frac{(L \lambda^1 d\lambda^2)^2}{1 - (\lambda^1)^2}, \quad (4.21)$$

が結論づけられる。ここで座標変換を $\lambda^1 \rightarrow \lambda^1 / \sqrt{L^2 + (\lambda^1)^2}$ のように行えば計量が

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{(\lambda^1)^2}{L^2}\right) (d\lambda^0)^2 + \frac{(d\lambda^1)^2}{1 + (\lambda^1)^2/L^2} + (\lambda^1 d\lambda^2)^2 \quad (4.22)$$

と書き換えられ、静的座標の pure AdS_3 時空が得られた。

²¹⁾ 4.3 節では n を 6 つ見つければ良いと言ったが、ここでは連続パラメータ θ ごとに n を見つけることに成功している。

²²⁾ すでに述べたように、 C_λ^- の最小値のある有限の近傍だけ信頼できるので、 $\theta \sim \lambda^2$ で成り立つことを要請するのが正しい。しかし有限の近傍であるので、 $\theta = \lambda^2$ 周りの級数展開が信頼でき、以下の結果は問題ない。

• AdS₃ ソリトン

AdS ソリトン時空は境界の場の理論での閉じ込め相を記述する。3次元において対応する場の理論がどのようなものかは明確にわかっていないので、ここでは笠-高柳公式が成り立つような境界の理論が存在すると仮定して、場の理論のエンタングルメント・エントロピーが

$$S(\alpha) = \frac{L}{2G} \ln \left[\frac{2r_0}{\epsilon} \sin \left(\frac{\alpha r_0}{L} \right) \right] \quad (4.23)$$

であると想定する (r_0 は長さの次元を持つ定数)。ここからはバルクを忘れ、この $S(\alpha)$ からバルクの再構築を試みる。

Euler-Lagrange 方程式は

$$\alpha'(\theta)^2 - 1 + \frac{L\alpha''(\theta)}{r_0} \tan \left(\frac{r_0\alpha(\theta)}{L} \right) = 0 \quad (4.24)$$

であり、pure AdS₃ と同様に解けて

$$\alpha'(\theta)^2 - 1 + \frac{L\alpha''(\theta)}{r_0} \tan \left(\frac{r_0\alpha(\theta)}{L} \right) = 0 \quad (4.25)$$

を得る。従ってバルクの点は $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$ である。過去の切断は

$$C_\lambda^-(\theta) = \lambda^0 - \frac{L^2}{r_0} \cos^{-1} \left[\lambda^1 \cos \left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2) \right) \right] \quad (4.26)$$

であり、(4.16) は

$$\begin{aligned} n(\lambda, \theta) \propto & L\lambda^1 \sqrt{1 - (\lambda^1)^2 \cos^2(\theta - \lambda^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda^0} \\ & + \frac{r_0}{L} \lambda^1 ((\lambda^1)^2 - 1) \cos \left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2) \right) \frac{\partial}{\partial \lambda^1} - \sin \left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2) \right) \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

を与える。そして条件 (4.18) によって共形計量

$$ds^2 = e^{\omega(\lambda)} \left[-(1 - (\lambda^1)^2)(d\lambda^0)^2 + \frac{L^4}{r_0^2} (d\lambda^1)^2 + L^2(\lambda^1)^2(1 - (\lambda^1)^2)(d\lambda^2)^2 \right] \quad (4.28)$$

を得る。

残った ω_0 は hole-ography で決める。今の場合 $\phi = \lambda^2$ であり、(4.9) は $\delta\lambda^1 = 0, \delta\phi = \delta\lambda^2$ によって満たされる。従って (4.11) より

$$\frac{r_0\lambda^1}{\sqrt{1 - (\lambda^1)^2}} \delta\lambda^2 = e^{\omega(\lambda)/2} L\lambda^1 \sqrt{1 - (\lambda^1)^2} \delta\lambda^2, \quad \text{i.e.} \quad e^{\omega(\lambda)} = \frac{(r_0/L)^2}{(1 - (\lambda^1)^2)^2}. \quad (4.29)$$

よって計量は

$$ds^2 = -\frac{(r_0/L)^2(d\lambda^0)^2}{1 - (\lambda^1)^2} + \frac{(L d\lambda^1)^2}{(1 - (\lambda^1)^2)^2} + \frac{(r_0 \lambda^1 d\lambda^2)^2}{1 - (\lambda^1)^2} \quad (4.30)$$

であり、 $\lambda^1 \rightarrow \sqrt{(\lambda^1)^2 - r_0^2}/\lambda^1$ と置き換えて

$$ds^2 = -\left(\frac{\lambda^1}{L} \right)^2 (d\lambda^0)^2 + \frac{(L d\lambda^1)^2}{(\lambda^1)^2 - r_0^2} + ((\lambda^1)^2 - r_0^2)(d\lambda^2)^2 \quad (4.31)$$

を得る。これは AdS₃ ソリトン計量である。

• BTZ ブラックホール

ここでも笠-高柳公式からエンタングルメント・エントロピー

$$S(\alpha) = \frac{L}{2G} \ln \left[\frac{2r_0}{\epsilon} \sinh \left(\frac{\alpha r_0}{L} \right) \right] \quad (4.32)$$

から出発し、バルクを忘れてこの $S(\alpha)$ から再構築を試みる.

Euler-Lagrange 方程式は

$$\alpha'(\theta)^2 - 1 + \frac{L\alpha''(\theta)}{r_0} \tanh \left(\frac{r_0\alpha(\theta)}{L} \right) = 0 \quad (4.33)$$

となり、解は

$$\alpha_\lambda(\theta) = \frac{L}{r_0} \cosh^{-1} \left[\lambda^1 \cosh \left(\frac{r_0}{L} (\theta - \lambda^2) \right) \right] \quad (4.34)$$

である.

過去の切断は

$$C_\lambda^-(\theta) = \lambda^0 - \frac{L^2}{r_0} \cosh^{-1} \left[\lambda^1 \cosh \left(\frac{r_0}{L} (\theta - \lambda^2) \right) \right] \quad (4.35)$$

で与えられ、条件 (4.16) によって

$$\begin{aligned} n(\lambda, \theta) \propto & L\lambda^1 \sqrt{(\lambda^1)^2 \cosh^2(\theta - \lambda^2) - 1} \frac{\partial}{\partial \lambda^0} \\ & + \frac{r_0}{L} \lambda^1 ((\lambda^1)^2 - 1) \cosh \left(\frac{r_0}{L} (\theta - \lambda^2) \right) \frac{\partial}{\partial \lambda^1} - \sinh \left(\frac{r_0}{L} (\theta - \lambda^2) \right) \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

を得る. これが常にヌルベクトルということから共形計量が決まる :

$$ds^2 = e^{\omega(\lambda)} \left[-((\lambda^1)^2 - 1)(d\lambda^0)^2 + \frac{L^4}{r_0^2} (d\lambda^1)^2 + L^2 (\lambda^1)^2 ((\lambda^1)^2 - 1) (d\lambda^2)^2 \right]. \quad (4.37)$$

さて、 ω を決めよう. 今の場合 $\phi = \lambda^2$ であり、(4.9) は再び $\delta\lambda^1 = 0, \delta\phi = \delta\lambda^2$ によって満たされる. よって (4.11) より

$$\frac{r_0\lambda^1}{\sqrt{(\lambda^1)^2 - 1}} \delta\lambda^2 = e^{\omega(\lambda)/2} L\lambda^1 \sqrt{(\lambda^1)^2 - 1} \delta\lambda^2 \quad \text{i.e.} \quad e^{\omega(\lambda)} = \frac{(r_0/L)^2}{((\lambda^1)^2 - 1)^2}. \quad (4.38)$$

従って計量は

$$ds^2 = -\frac{(r_0/L)^2 (d\lambda^0)^2}{(\lambda^1)^2 - 1} + \frac{(L d\lambda^1)^2}{((\lambda^1)^2 - 1)^2} + \frac{(r_0 \lambda^1 d\lambda^2)^2}{(\lambda^1)^2 - 1}, \quad (4.39)$$

であり、座標変換 $\lambda^1 \rightarrow \lambda^1 / \sqrt{(\lambda^1)^2 - r_0^2}$ により BTZ ブラックホールの計量となっていることが分かる :

$$ds^2 = -\frac{(\lambda^1)^2 - r_0^2}{L^2} (d\lambda^0)^2 + \frac{(L d\lambda^1)^2}{(\lambda^1)^2 - r_0^2} + (\lambda^2 d\lambda^2)^2. \quad (4.40)$$

4.5 共形因子を決定する別の方法

これまでは共形因子を特定するのに (4.11) を用いた。他の手法として、測地線方程式と笠-高柳公式を用いる手法を紹介したい。ただし測地線方程式を用いるため、量子重力の記述への期待は持てない。

3.1 節で述べたように、点関数 α_p によって p を通る測地線²³⁾ の境界上の端点は $\theta \pm \alpha_p(\theta)$ と表された。今固定された θ に対して $\alpha_p(\theta) = \alpha_q(\theta)$ が成り立つなら、 p と q は θ 方向の測地線が共通である、つまり p, q は同じ測地線の上にある。これは hole-ography において次のホログラフィックな解釈を与える。

- ホログラフィックな時空 $\{\alpha_\lambda\}$ の中で、

$$\{\alpha_\lambda \mid \alpha_\lambda(\theta) = \text{const} (\theta: \text{固定}), \lambda^0 = \text{const}\} \quad (4.41)$$

は測地線をなす。

さて、これによって 4.3 節の手順 (5)(6) は次のように置き換わる。

- (5)' 条件 $\alpha_\lambda(\theta) = \alpha_{\lambda+ev}(\theta)$ ($v^0 = 0$) を定数 ϵ の 1 次までで解くと、規格化因子を除いて測地線の接ベクトル $v = v(\lambda, \theta)$ が定まる。この規格化因子は勝手に手で固定して良い。測地線に沿った加速度は $v(\lambda + \epsilon v, \theta)$ の展開における ϵ^1 の係数から読み取れる。
- (6)' 共形因子が未定の計量で書かれた測地線方程式に 2 つのベクトルを代入し、任意の θ で方程式の成立を要求すれば、共形因子が定数倍を除いて定まる。漸近的に AdS_3 (AdS 半径 L) であることからこの定数も固定される。

以下ではこれによる再構築を 4.4 節の 3 つに対して試みる。

• Pure AdS_3

式 (4.19) から再出発する。条件 $\alpha_{\lambda+ev}(\theta) = \alpha_\lambda(\theta)$ を解くと

$$v^1 \cos(\theta - \lambda^2) + v^2 \lambda^1 \sin(\theta - \lambda^2) = 0 \quad (4.42)$$

となり、これより適当な規格化の下で

$$v(\lambda, \theta) = \lambda^1 \sin(\theta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial \lambda^1} - \cos(\theta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial \lambda^1} \quad (4.43)$$

を得る。さらに $v(\lambda + \epsilon v, \theta)$ を展開して、

$$a(\lambda, \theta) = \lambda^1 \frac{\partial}{\partial \lambda^1} + \frac{1}{2} \sin(2(\theta - \lambda^2)) \frac{\partial}{\partial \lambda^2}. \quad (4.44)$$

²³⁾ これを測地線と思うのか、極小曲面と思うのかについては 5 節で議論する。

測地線方程式に代入すると,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda^2} \tan(\theta - \lambda^2) - \lambda^1 \left[4\lambda^1 + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda^1} ((\lambda^1)^2 - 1) \right] = 0 \quad (4.45)$$

を得るが, これを任意の θ で成立させるには

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda^2} = 4\lambda^1 + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda^1} ((\lambda^1)^2 - 1) = 0 \quad (4.46)$$

が必要十分である. これを解くと,

$$\omega(\lambda) = -\ln(1 - (\lambda^1)^2) + \omega_0 \quad (\omega_0: \text{定数}) \quad (4.47)$$

であるので, 計量は定数倍を除いて

$$ds^2 = e^{\omega_0} \left[-\frac{(d\lambda^0)^2}{1 - (\lambda^1)^2} + \frac{(L d\lambda^1)^2}{\{1 - (\lambda^1)^2\}^2} + \frac{(L \lambda^1 d\lambda^2)^2}{1 - (\lambda^1)^2} \right]. \quad (4.48)$$

のように決まる.

前と同じ座標変換によって

$$ds^2 = e^{\omega_0} \left[-\left(1 + \frac{(\lambda^1)^2}{L^2}\right) (d\lambda^0)^2 + \frac{(d\lambda^1)^2}{1 + (\lambda^1)^2/L^2} + (\lambda^1 d\lambda^2)^2 \right] \quad (4.49)$$

と変形できるが, 漸近的に半径 L の AdS_3 になることを要求すれば $\omega_0 = 0$ となる.

• AdS_3 ソリトン

この場合は v, a が次のように与えられる:

$$v(\lambda, \theta) = \frac{r_0}{L} \lambda^1 \sin\left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^1} - \cos\left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^2}, \quad (4.50)$$

$$a(\lambda, \theta) = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \lambda^1 \frac{\partial}{\partial\lambda^1} + \frac{r_0}{2L} \sin\left(\frac{2r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^2}. \quad (4.51)$$

これらを測地線方程式に代入すれば,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda^2} \tan(\theta - \lambda^2) - \frac{r_0}{L} \lambda^1 \left[4\lambda^1 + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda^1} ((\lambda^1)^2 - 1) \right] = 0. \quad (4.52)$$

が得られ, これを解けば再び (4.47) が得られる. 上と同様の座標変換を経て, $\omega_0 = 2\ln(r_0/L)$ と定まる.

• BTZ ブラックホール

この場合の v, a は

$$v(\lambda, \theta) = \frac{r_0}{L} \lambda^1 \sinh\left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^1} + \cosh\left(\frac{r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^2}, \quad (4.53)$$

$$a(\lambda, \theta) = -\left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \lambda^1 \frac{\partial}{\partial\lambda^1} - \frac{r_0}{2L} \sinh\left(\frac{2r_0}{L}(\theta - \lambda^2)\right) \frac{\partial}{\partial\lambda^2}. \quad (4.54)$$

となる。測地線方程式から

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda^2} \tanh(\theta - \lambda^2) - \frac{r_0}{L} \lambda^1 \left[4\lambda^1 + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda^1} ((\lambda^1)^2 - 1) \right] = 0 \quad (4.55)$$

が得られ，ここでも (4.47) となる。再び座標変換によって $\omega_0 = 2 \ln(r_0/L)$ になる。

5 まとめと展望

バルク再構築の手法として光円錐切断の手法と hole-ography の手法が知られており、本研究ではそれらを組み合わせることで互いの欠点を克服し、causal wedge と entanglement wedge が一致するような 3次元静的時空が再構築されることを示した。場の量子論の量としてエンタングルメント・エントロピーを採用し、それをもとに点関数と切断が求まった。その後切断から共形計量を求めて、不定の共形因子は点関数を用いて hole-ography によって決定できた。しかし今後の課題や展望は多く、以下で順に議論していく。

2つの wedge が一致するかの確認

2つの wedge が一致するか、つまり (4.7) で要請した

$$C_\lambda^\pm(\theta) = t_0 \pm L\alpha_\lambda(\theta) \quad (5.1)$$

が成り立つかを、4.3節の手順の途中で境界から判別できねばならない。それはバルク点特異性に起因する相関の発散を確認すれば良いため、原理的には次の流れに従うことで示せる。まず $x_1, x_2 \in C_\lambda^+$ と $y_1, y_2 \in C_\lambda^-$ を取る。境界上の任意の演算子 $\mathcal{O}(x)$ に対する相関

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\mathcal{O}(y_1)\mathcal{O}(y_2) \rangle \quad (5.2)$$

を考える。任意の x_1, x_2, y_1 に対してある y_2 が存在してこれが発散するとき、 C_λ^\pm は正しい切断と言える。ここで4点(以上)必要となるのは運動量保存からの要請である。以上の作業を λ ごとに確認すれば良い。²⁴⁾ しかし脚注 19) (p.32) で述べたように、ブラックホール時空や AdS₃ ソリトンのようにバルクに穴が存在する場合、(5.1) は $\theta \sim \phi$ の付近でしか信用できない (ϕ は α_λ を最小にする値であった)。このためそのような理論に対しては、上の4点相関の全ての点を信頼できる $\theta \sim \phi$ の付近に集めて計算することになるが、そうした際には運動量が保存できないためバルク点特異性が起こらない(図 13)。このような困難のため上の確認作業は、特に境界の理論が有限温度系(ブラックホールに双対)や閉じ込め相(AdS ソリトンに双対)でない場合に正当化される。これら例外的な場合に関してはバルク点特異性以外の利用での確認方法を見つけねばならない。あるいは今回の手法を2つの wedge の一致に頼らずに適用できるように一般化できればより良く、それは後に議論する。

穴のある時空について

上の議論で $\theta \sim \phi$ の付近だけが信用できるのは、 α_λ が大きいと対応する極小曲面が穴を囲むものと補集合の極小曲面の和になるためである。また穴に十分近い λ に対しては信頼できる $\theta \sim \phi$ 付近の有

²⁴⁾ 尚、バルク点特異性から過去の切断を求める際は5点相関を計算せねばならないし、点の配置も手探りとなるためより複雑である。

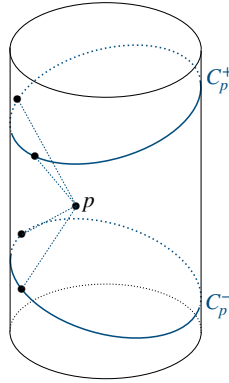


図 13. 運動量が p で保存できないような相関はバルク点特異性としての散乱に帰着できない。

限区間がもはや取れない可能性もある。そしてこれらのことを境界から判別する方法がないため、得られた計量がどのような範囲の λ に対して適切なものを与えているかが不明であり、問題となる。ところが 4.4 節で再構築した 3 つの計量全てが、 λ の制限がなく期待通りの計量を与えている。その理由を考えるためには、4.4 節で得た点関数と切断の表式が $\theta \sim \phi$ 以外で何を意味しているのかを考える必要がある。

● 点関数と entwinement

まず点関数は Euler-Lagrange 方程式 (4.6) を停留するような関数として与えた。そしてバルクの描像では、境界で $\theta \pm L\alpha_\lambda(\theta)$ を端点とする測地線の族を考え、その交点が λ となっているのであった。測地線と言っているが、3.1 節での解析は pure AdS₃ に対して行っており、測地線は常に極小曲面である。笠-高柳公式の主張を考慮すれば、一般にはエンタングルメント・エントロピーに関するバルクの量は極小曲面の面積であり、一般には測地線の族というよりは極小曲面の族と考える方が良さそうである。

ここでエンタングルメント・エントロピー $S(\alpha)$ に着目しよう。4.4 節での穴のある 2 例に対しては、 $S(\alpha)$ の表式は笠-高柳公式を用いて極小曲面から与えた。ただし厳密に述べると測地線の長さを計算して得た値のため、上で述べた理由から、ある程度大きい α 以上では $S(\alpha)$ の表式は誤った値を与える。これが $\theta \sim \phi$ で信用すべきであると言ったもう 1 つの理由である。²⁵⁾

このような事情にも関わらず、4.4 節での穴のある 2 例に対してバルクを解析すると、極小曲面の族ではなく測地線の族を採用した場合に、任意の θ で点関数の表式が正しいことが確かめられた。すなわち、測地線と極小曲面が一致するような範囲 (小さい α) での $S(\alpha)$ をそのまま任意の α へ解析接続したものは、形式的な笠-高柳公式を通してバルクの測地線の長さを与えるのである。この類の $S(\alpha)$ は実

²⁵⁾ 1 つ目の理由は 2 つの wedge の一致に際して、 α が大きいと極小曲面が変化し、(5.1) が信頼できないという点であったが、根本的には共に同じ要因である。

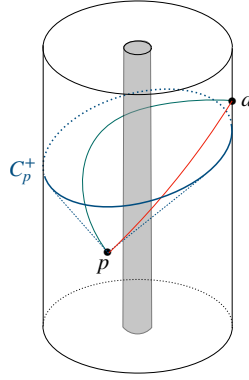


図 14. $\partial J^\pm(p)$ から離れるヌル測地線 (緑). このような場合, 測地線でない時間的曲線 (赤) で p と a が結べる.

は entwinement²⁶⁾ と呼ばれ [15] を発端に研究されており, 境界の理論での内部自由度に関連していると考えられている. つまり点関数はエンタングルメント・エントロピーというよりむしろ entwinement から定義され, 対応するバルクの測地線族の交点を境界から定義していると考えの方が良さそうなのである.

● 光円錐切断とヌル測地線

さて点関数が entwinement から得られ, それを積極的に利用する方向性で (5.1) を見直したい. 今や点関数の表式は任意の θ で正当化されたが, (5.1) は entanglement wedge から得られた関係式なので大きい α では測地線とは関係なく, そのまま任意の θ へ格上げという訳にはいかない. ところが切断の定義を少し修正すればこれが正当化できてしまう.

切断の定義は (3.28) と (3.29) で与えたように

$$C_p^\pm = \partial J^\pm(p) \cap \partial M \quad (5.3)$$

である. ここで $\partial J^\pm(p)$ は p と時間的でない滑らかなヌル曲線で結ばれる点の集合である. 従って一般に p から未来 (過去) に向かうヌル測地線が C_p^+ (C_p^-) に到達するかは分からない. 例えば光子球²⁷⁾よりも内側の点から放たれたヌル測地線はそもそも境界に到達しないし, 光子球に近い外側の点から放たれたものでもブラックホールを回ってから境界にたどり着くため, それは既に $\partial J^\pm(p)$ から離れうる (図 14).

光円錐切断の手法は (5.3) の定義を持つ切断に対して 3.2 節で導入した事柄が証明されている. よって確実な再構築を行うためには (5.3) を利用すべきであるのだが, 試しにヌル測地線の境界への到達点として切断を定義し直したとしよう. そしてバルクでヌル測地線の計算を行ってみると, (5.1) がこの定義で任意の θ で満たされていることが, 4.4 節の穴のある 3 つの例全てに対して確認できた.

²⁶⁾ エンタングルメント・エントロピーと一致する範囲も entwinement と呼ぶことにする.

²⁷⁾ 光子球 (Photon sphere) とは, ブラックホールの重力でヌル測地線が脱出できないような空間の最大領域のこと.

また脚注 22) においては, 共形計量を求める条件 (4.18)

$$\forall \theta, \quad g_{\mu\nu}(\lambda)n^\mu(\lambda, \theta)n^\nu(\lambda, \theta) = 0 \quad (5.4)$$

は $\theta \sim \phi$ で信用できるためにそこでの級数展開を使うと述べた. ところが逆にこれは任意の θ で成り立つことが分かる. そのためヌル測地線で定義した切断を用いた光円錐切断による再構築が, 少なくとも 3 つの例に対しては結果的に正しい計量を与えているのである.

• 総括と方向性

まとめると, 今回の手法は次の解釈によって, θ の範囲などの細かい話を気にせずに正当化される (少なくとも 3 例に対して). まず entwinement から得られる点関数がバルクの点をホログラフィックに定義し, (5.1) がヌル測地線で定義した切断を完全に与えている. そしてその切断から共形計量が, 点関数から空間的距離が求まる.

ここで議論した内容は今回の再構築の手法を柔軟にする可能性を持っているが, 今後 2 つの wedge が一致することを要求せずとも適用できる手法に拡張するためには, 新しい定義の切断が一般にはバルク点特異性では得られないことに注意せねばならない. (バルク点特異性が本来の定義の切断とのみ相性が良い.) このため一般化の際にヌル測地線で定義した切断が得られる手法を再検討せねばならなくなる. しかし本研究では, 状況が特殊ではあるが entwinement からこの新しい定義の切断が得られていることを考えると, 後で議論するように点関数と切断の関係を議論していくことで解決されることが期待できる.

ブラックホールの内部の再構築

バルクのどれくらい深くまで再構築ができるかを検討したい. ブラックホールの中の時空の再構築は唯一 [16] において行われているが, 本研究の枠組みでもブラックホールの中に言及できる可能性があるか.

まずは点関数の立場から考えよう. 点関数がエンタングルメント・エントロピーから与えられていると思うと, 上で議論したようにバルクを深く調べることはできない. これは極小曲面の制限として [17–19] においてより詳しく調べられている. ところが我々は entwinement によって点関数を与えるという方がより正確であろうことを議論した. そして少なくとも古典的には entwinement は測地線に対応しているので, 極小曲面と異なってブラックホールの中にも入れる.

ところが今の点関数はブラックホールの中に入らない測地線のみに対応していることが, 上と同じバルクの解析で確かめられた. 従って今の定義の点関数はブラックホールの外を隈無く調査できるが, 内部には立ち入れない. しかし実は, BTZ ブラックホールに対してブラックホールの中を通る測地線

を調べると、 $S(\alpha)$ を複素数に解析接続したものが対応していることが [6] において分かっている。具体的にはブラックホールの半径を r_0 として、

$$\tilde{S}(\alpha) = S\left(\alpha + i\frac{\pi}{2}r_0\right) \quad (5.5)$$

で定義される \tilde{S} で S を置き換えた Euler-Lagrange 方程式 (4.6) の停留条件が、ブラックホールの中を通る測地線に対応した点関数を与える。

この変形された点関数に対して (5.1) が成り立っているか否かは、ブラックホールの内部の点に対応する切断と比較して検討すべきである。もし切断が同じように点関数から得られるなら、ブラックホールの中も再構築できる。というのは、光円錐切断の手法では過去 (未来) の切断の集合が得られたら $\partial I^+(\partial M)$ ($\partial I^-(\partial M)$) が再構築できるため、本質的にブラックホールに対する制限がないからである。(光円錐切断の手法がこれまでブラックホールの内部に弱かった理由は、バルク点特異性がそうだからであって、切断自体はブラックホールの内部にもアクセスできる。)

点関数と切断の関係：一般化へ向けて

今回の手法の大きな課題として次の2点が挙げられる。

- 点関数と切断は一般にどう関係するか。
- 共変性²⁸⁾があるように、そして高次元にも適用できるように拡張が可能か。

ここではこれらの問題について議論していく。なお話を簡単にするため、上の話を引きずらずに光円錐切断の定義を元来の (5.3) に戻しておく。またしばらくは話を3次元の静的なバルクに限定し、最後に共変性や次元に関して議論する。

● 点関数と切断の関係の模索

まず述べておきたいのは、点関数と切断の間には必ず関係があるということである。それは両者が (今のところ) 独立にバルクの点のホログラフィックな定義をそれぞれ与えているが、それら2つの定義が一致していなければ理論が破綻するからである。もちろんそもそも一致しなければホログラフィックな双対性がないだけであると主張はできる。しかし点関数も切断も純粋にバルク時空の立場での定義を持っているため、やはりホログラフィーとは無関係に関係は存在せねばならない。従って理論の双対性の存在問題はむしろ、この関係性をホログラフィックに書き換えた際に、それを境界の理論が満たすか否かという問題に帰着する。

²⁸⁾ 座標系を指定しない再構築の定式化を指す。Hole-ography では境界の座標 (t, θ) を指定し、バルクの時間座標も t でなければならぬため共変ではない。一方で光円錐切断の手法は共変である。

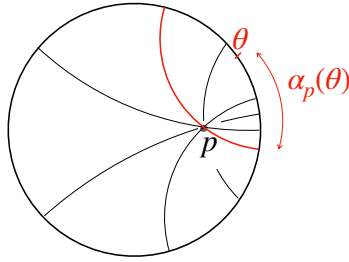


図 15. 点関数のバルクでの定義

点関数と切断のバルクでの定義を確認しておこう．切断のバルクでの定義は (5.3) である．そして点関数 α_p のバルクでの定義は以下の通りである．点 p を含む時間一定面を取り，その上で p を通る空間的測地線を全て考える (図 15)．各測地線は境界上の 2 端点を指定することで区別でき，それは 2 端点の midpoint θ と midpoint と両端の差 $\alpha_p(\theta)$ で $\theta \pm \alpha_p(\theta)$ と表せる．この α_p が p に対応した点関数である．²⁹⁾ Hole-ography の Euler-Lagrange 方程式 (4.6) が成り立つなら， $S(\alpha)$ を笠-高柳公式を使って測地線の長さから与えれば同じ点関数が得られることになる．注目すべきは，切断の集合とバルクの点の集合の間，点関数の集合とバルクの点の集合の間にはそれぞれ 1 対 1 の対応があることであり，³⁰⁾ 従って点関数と切断も 1 対 1 の対応がある．

点関数と切断の間を模索するにあたって重要なのは，(5.1) からのずれは共形因子の違いで生じるということである．このことは次のように理解できる．まず切断はバルクの因果構造のみで決定できるため，共形計量を定めれば切断が一意的に決まる．ここでは共形計量を「共形因子が不定の計量」と済ますのではなく，「共形因子の違いを無視する同値関係で結ばれる計量の集合」と少し数学的な解釈をしておくことにする．そして 1 つ共形計量をとると，(5.1) を課すことで 1 つ代表元が選ばれ，それを g_* とする．この g_* は本研究で再構築してきたものであり，一意的に定まることを見てきた．次に $g = e^\omega g_*$ のようにして色々な ω を考えると，共形計量の他の元を全て表せる．このとき関係式 (5.1) は ω に応じてずれていくことになる．なぜなら ω の変化が測地線を変えるために点関数は変化していくが，切断は ω に依らないからである．そして関係式の ω による修正が見つければ，それをホログラフィックに解釈し直せるかを研究する．³¹⁾ 尚，漸近 AdS を要請することため $\omega|_{\partial M} = 1$ である．

以降ではこのずれを調べるにあたって，点関数と切断を直接比べるよりも効果的であろう対象を探していき，最後に高次元への可能性を議論する．

²⁹⁾ 異なる時間一定面で同じ関数形でも区別するものとする．すなわち点関数の集合は，厳密には時間一定面の時刻と点関数のペアの集合と述べた方が正しい．

³⁰⁾ バルクの点の集合といっても，3 で述べたように正確にはバルクの部分集合である．ここではそこに深入りせずに，点関数が対応するバルクの部分集合と切断のその共通部分に限定して考える．

³¹⁾ この問題に対してまではここでは踏み込めない．

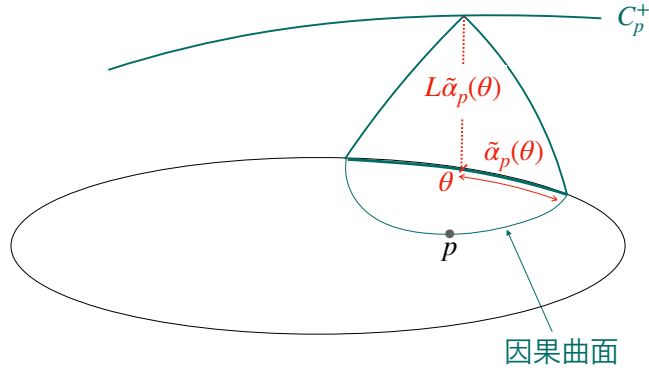


図 16. 因果曲面と光円錐切断

- 光円錐切断を点関数のように理解するアプローチ

ここでは切断による点の定義が点関数と類似の構造で理解できることを示す。今は時空が静的な場合を考えているので時間反転点対称性があり、 p の切断 C_p^\pm は

$$C_p^\pm(\theta) = t_0 \pm L\tilde{\alpha}_p(\theta) \quad (5.6)$$

の形をしている。ここで t_0 は p の時間座標である。このような $\tilde{\alpha}_p(\theta)$ は図 16 のように描かれる。

区間 $\tilde{I}_p(\theta) = [\theta - \tilde{\alpha}_p(\theta), \theta + \tilde{\alpha}_p(\theta)]$ に対する causal wedge $\mathcal{C}_{I_p(\theta)}$ を考える。その境界 $\partial\mathcal{C}_{I_p(\theta)}$ と $t = t_0$ 面がバルクで交わってできる曲線を因果曲面と呼ぶことにする。(曲面と呼ぶのは高次元でも同じ概念があるためである。) このとき causal wedge の定義によって、 θ によらず $I_p(\theta)$ に対する因果曲面は p を通る。従って切断によって点を与えることは因果曲面の交点として p を与えることに等しく、この構造は測地線 (大雑把に言って極小曲面) の交点として p を与える hole-ography に類似している。そのため、点関数と切断の関係式を α_p と $\tilde{\alpha}_p$ の関係式として与える方が見やすいと思われる。その関係式は ω によって記述されるが、最終的にはホログラフィックに与え直す必要がある。

- 点関数を光円錐切断のように理解するアプローチ

今度は点関数の点の定義を切断と類似の構造で理解できることを示す。それは逆に

$$E_p^\pm(\theta) = t_0 \pm L\alpha_p(\theta) \quad (5.7)$$

を考えることである。これは $I_p(\theta) = [\theta - \alpha_p(\theta), \theta + \alpha_p(\theta)]$ に対する entanglement wedge $\mathcal{E}_{I_p(\theta)}$ を考え、 $\partial\mathcal{E}_{I_p(\theta)}$ が θ に応じて動くことによってできる境界上の軌跡である (図 17)。そこで E_p^+ (E_p^-) を、未来 (過去) のエンタングルメント切断と呼ぶことにしよう。式 (5.1) は $E_p^\pm = C_p^\pm$ を課しているが、2種類の切断が一致するという条件と解釈できる。以下では光円錐切断を L 切断 (light-cone cut)、エンタングルメント切断を E 切断 (entanglement cut) と略すことにする。

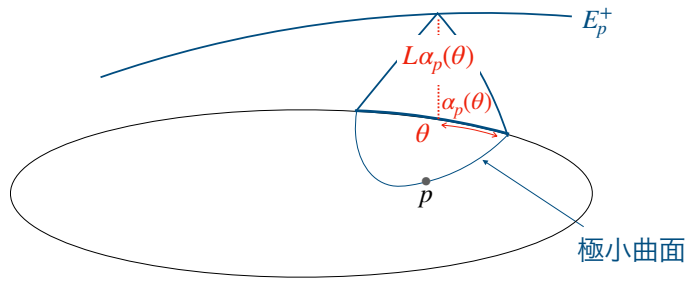


図 17. エンタングルメント切断

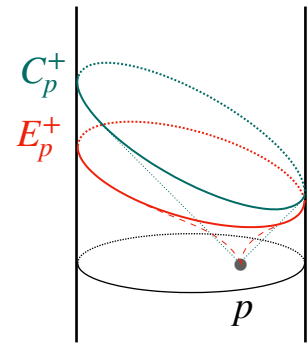


図 18. 2種類の切断

この描像では点関数と L 切断の関係が，図 18 のように ω に応じて E 切断が L 切断からどうずれていくかを調べることで判明する．これは α_p と $\tilde{\alpha}_p$ の関係を探るやり方とは本質的には何も変わらないし，解析の容易さも変わらない．というのは，図の見た目が変わるだけで，値としては t_0 や L という定数の違いしかないためである．しかしあえて E 切断を定義しようとしたのは，共変な手法へと拡張できる可能性があるからである．前者の描像の範囲で一般化を試みても， $t = t_0$ 面をとることを避けられない．

今，仮に L 切断と E 切断の関係が 3 次元の静的時空の範囲で一般に判明し，それが必ずしも静的でない 3 次元の時空へ自然に拡張できそうであったとする．Holography における距離の公式も E 切断によって書き換えておく．我々は L 切断が座標系に依らずにうまく定義されていることを知っているので，L 切断から E 切断を共変に定義し直せらるうと期待できる．さらに L 切断の方は次元にも依らないため，うまくいけば次元によらない E 切断の定義も与え得る．このことが成功すれば，L 切断から共形計量を定め E 切断から空間的な距離を求める，という再構築の手法を提唱できる．

このように E 切断を適切に定義した後は，改めてエンタングルメント・エントロピー (あるいは entwinement) から E 切断を得られるかを再検討することは有意義である．なぜなら [7,13] にも述べられているが，バルク点特異性による L 切断の特定は未だ困難が多く残っているからである．またそれによって，場の量子論における相関関数の発散とエンタングルメント・エントロピーに関係性を見出すことができるからである．

共形因子の物理的な意味

上では g_* が $E_p^\pm = C_p^\pm$ を満たす計量として新しく $g = e^\omega g_*$ を考えると，L 切断と E 切断の一般の関係が ω によって与えられるはずだと結論づけた．ここでは ω のバルクでの物理的な意味を考えるとから出発し，そのホログラフィーでの解釈を与えたい．少なくとも 4.4 節の 3 例に対して言えること

は、それらの計量が g_* であり、どれも物質場のない Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.8)$$

の解であるということである。ただし漸近 AdS_3 時空には曲率が負であることに由来した宇宙項が入っている。ここで計量を g_* から $g = e^\omega g_*$ へ変形したとしよう。このとき (5.8) は成り立たないが、その左辺の変化分がエネルギー・運動量テンソルであると思えば、物質場のある古典重力理論になる。すなわちスカラー量 ω を与えることは物質場を与えることになる。

ここで境界の理論の状態が 4.4 節の 3 例で真空になっていることを踏まえ、次のような (攻めた) 予想を立ててみたい。まず境界の理論が真空である場合には境界で $E_p^\pm = C_p^\pm$ が成立し、再構築されるバルクの計量が g_* になる。今度は境界の場の量子論において、L 切断がそのまま E 切断が L 切断と異なるような状態を取ろう。すると $g = e^\omega g_*$ の形の計量が再構築され、それは物質場のある重力理論になっている。さらに境界でより一般の状態を考えると、L 切断も真空のものとは変わってしまうため、今度はバルクの共形計量も変わることになる。

ここで注意すべきは、真空でなくても (5.1) が成り立つ場合もあるため、場の量子論ごとに 1 つ g_* が対応するとは限らないことであり、そのため上のように同じ場の量子論の中でも g_* が動きうる。例えばバルクで重力崩壊が起こるときは時間をかけて事象の地平線が形成されるが、因果構造を保持している g_* の時間変化こそが地平線を生み出す。このときホログラフィックには、境界で L 切断が非自明な飛びを含む時間変化を起こしている。境界における L 切断の変化からバルクの重力崩壊を理解するようなモデルが構築されれば、ホログラフィーの分野で重要な役割を果たすだろう。

6 謝辞

この1年間、指導教官の橋本幸士教授には物理の議論のみならず、研究遂行に際するご自身の洗練された技術的、心理的な視点を多くご教授頂き大変お世話になりました。私が [8] の執筆に一人で取り組み始めたのは橋本教授の後押しがあったからであり、その後も継続的な執筆に関するご助言を頂いて完遂することができました。引き続き論文執筆後の研究活動に対するご指導もいただいております、大変感謝しております。

昨年度に定年退官された畑浩之教授は、残り半年という厳しい制限の中私の申し入れを受け入れてくださり、共同研究が行えました。約2ヶ月間にわたって週3回、1対1という集中的なゼミを通して、私に弦の場の理論の基礎知識を与えてくださりました。本論文では研究分野の違いからその内容を扱えませんでした。現在もオンラインでの議論を快く引き受けてくださっていて、お世話になっております。ここに感謝の意を表します。

最後に、主に中間報告会の質疑を通して私の研究をより強固なものにいただいた、素粒子論研究室の皆様に感謝いたします。

参考文献

- [1] J.M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [hep-th/9711200].
- [2] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].
- [3] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [hep-th/9802109].
- [4] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [hep-th/0603001].
- [5] V. Balasubramanian, B.D. Chowdhury, B. Czech, J. de Boer and M.P. Heller, *Bulk curves from boundary data in holography*, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 086004 [1310.4204].
- [6] B. Czech and L. Lamprou, *Holographic definition of points and distances*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 106005 [1409.4473].
- [7] N. Engelhardt and G.T. Horowitz, *Recovering the spacetime metric from a holographic dual*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **21** (2017) 1635 [1612.00391].

- [8] D. Takeda, *Light-cone cuts and hole-ography: explicit reconstruction of bulk metrics*, 2112.11437.
- [9] H.M. Brown, J.D., *Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity*, *Commun.Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [10] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, *Geometric and renormalized entropy in conformal field theory*, *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 443 [[hep-th/9403108](#)].
- [11] P. Calabrese and J.L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002 [[hep-th/0405152](#)].
- [12] J.L. Cardy, O.A. Castro-Alvaredo and B. Doyon, *Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy*, *J. Statist. Phys.* **130** (2008) 129 [[0706.3384](#)].
- [13] N. Engelhardt and G.T. Horowitz, *Towards a Reconstruction of General Bulk Metrics*, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 015004 [[1605.01070](#)].
- [14] J. Maldacena, D. Simmons-Duffin and A. Zhiboedov, *Looking for a bulk point*, *JHEP* **01** (2017) 013 [[1509.03612](#)].
- [15] V. Balasubramanian, B.D. Chowdhury, B. Czech and J. de Boer, *Entwinement and the emergence of spacetime*, *JHEP* **01** (2015) 048 [[1406.5859](#)].
- [16] K. Hashimoto and R. Watanabe, *Bulk reconstruction of metrics inside black holes by complexity*, 2103.13186.
- [17] V.E. Hubeny, *Extremal surfaces as bulk probes in AdS/CFT*, *JHEP* **07** (2012) 093 [[1203.1044](#)].
- [18] N. Engelhardt and A.C. Wall, *Extremal Surface Barriers*, *JHEP* **03** (2014) 068 [[1312.3699](#)].
- [19] N. Engelhardt and S. Fischetti, *Covariant Constraints on the hole-ography*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 195021 [[1507.00354](#)].